P4-2012-119

В. В. Пупышев *

РАССЕЯНИЕ МЕДЛЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. P4-2012-119
Рассеяние медленной квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом

В настоящей работе линейная версия метода фазовых функций в теории потенциального рассеяния дополняется новым асимптотическим методом. Этот метод предназначен для квантово-механического анализа и построения явных низкоэнергетических приближений парциальных фаз, амплитуд и сечений, а также радиальных компонент волновой функции рассеяния квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом. Построение всех низкоэнергетических приближений сводится к решению рекуррентной цепочки энергонезависимых систем, каждая из которых состоит из двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2012

Pupyshev V. V. P4-2012-119
Scattering of a Slow Quantum Particle
by an Axially Symmetrical Short-Range Potential

In the present work, the linear version of the variable phase approach to the potential scattering is added by a new asymptotic method. This method is adopted for a quantum mechanical analysis and the construction of explicit low-energy approximations for the partial phase shifts, amplitudes, cross-sections and radial components of the wave function describing the scattering of a quantum particle by an axially symmetrical short-range potential. The construction of these approximations is reduced to the solution of the recurrence chain of energy independent systems. Each system contains two linear first order differential equations.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является естественным расширением предыдущего анализа [1] рассеяния квантовой частицы сферически-симметричным короткодействующим потенциалом на случай аксиально-симметричного короткодействующего потенциала.

Объект нашего исследования – упругое рассеяние медленной квантовой частицы p_1 в ее трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ неподвижной силовой прямой $\mathcal{L}$, воздействующим на эту частицу посредством потенциала $\tilde{V}$. Предполагается, что этот потенциал зависит только от расстояния r между частицей p_1 и прямой $\mathcal{L}$ и является слабосингулярным, непрерывным и короткодействующим. Вследствие первого ограничения потенциал не меняется при повороте на любой угол $\varphi \in [0, 2\pi]$ в любой двумерной плоскости $\mathcal{P}$, перпендикулярной прямой $\mathcal{L}$, и поэтому называется аксиально-симметричным по отношению к этой прямой.

Как известно [2,3], благодаря такой симметрии квантовая частица p_1 движется свободно вдоль прямой $\mathcal{L}$, а двумерную волновую функцию $\Psi(r, \varphi; k)$ ее рассеяния потенциалом $\tilde{V}$ в плоскости $\mathcal{P}$ можно представить в виде бесконечного ряда, содержащего искомые радиальные компоненты $u_m(r; k)$ функции Ψ и известные собственные функции $\exp(\imath m\varphi)$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, проекции $-\imath\partial_\varphi$ оператора углового момента частицы на прямую $\mathcal{L}$. Асимптотика компоненты u_m при большом значении ее аргумента содержит парциальную фазу рассеяния δ_m. Через нее известным образом [3] выражаются парциальные амплитуда f_m и сечение σ_m рассеяния. Все фазы, амплитуды и сечения зависят от волнового числа k, которое связано с полной энергией E движения частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ равенством $E = (\hbar k)^2/(2m_1)$, где $\hbar$ и m_1 – константа Планка и масса частицы p_1.

Наша главная цель – создать и реализовать новый метод, предназначенный для построения явных приближений всех радиальных омпонент u_m волновой функции Ψ, парциальных фаз δ_m, амплитуд f_m и сечений σ_m в пределе малых положительных значений волнового числа k.

Более подробная постановка задачи, решаемой в настоящей работе, дается в разд. 1. Ключевыми для решения поставленной задачи являются свойства вспомогательных функций, связанных с функциями Бесселя целого порядка. Поэтому в разд. 2 приводятся необходимые нам представления этих функций в виде, наиболее удобном как для качественного анализа, так и для вычислений. Так как предлагаемый способ решения основан на линейной версии метода фазовых функций, то необходимо сформулировать эту версию в случае аксиально-симметричного потенциала. Такой формулировке посвящается разд. 3. Предложенная формулировка основана на использовании амплитудных функций. Анализ их строения дан в разд. 4. В разд. 5 подробно излагается предлагаемый метод построения и расчета низкоэнергетических приближений функции эффективного радиуса, парциальных фаз, амплитуд, сечений и радиальных компонент волновой функции рассеяния. Основные результаты выполненных исследований суммируются в заключении.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Символом d обозначим свободный положительный параметр, имеющий размерность расстояния. Вместо r и k будем использовать безразмерные аргумент $x \equiv r/d$ и параметр $q \equiv kd$. Всюду далее параметр q принимает любое положительное значение; значение $-1/2, 1/2, \ldots$ индекса λ считается фиксированным и конечным, где возможно этот индекс опускается для краткости записи; с той же целью символы ρ используются для обозначения безразмерного произведения $kr = qx$.

Сформулируем наши ограничения на безразмерный потенциал

$$V(x) \equiv (2m_1 d^2/\hbar^2)\tilde{V}(r = x/d)$$

в виде следующих трех условий:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} x^2|V(x)| = 0; \quad V(x) \in \mathcal{C}^0(0,\infty); \\ &\lim_{x\to\infty} x^n|V(x)| = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

В теории рассеяния [4,5] потенциал $V(x)$, удовлетворяющий таким условиям, называется короткодействующим потенциалом, слабосингулярным в начальной точке.

Парциальный анализ двумерной задачи рассеяния для функции Ψ в полярных координатах (r, φ) дан в монографии [3] и в работе [6]. Кратко изложим этот анализ и приведем полученные в его итоге соотношения, заменив в них индекс m на индекс $\lambda = m - 1/2$ и используя безразмерные переменные x, q и полярные координаты (x, φ).

Волновая функция $\Psi(x, \varphi; q)$ определяется как ограниченное в любой точке плоскости $\mathcal{P}$ решение двумерного уравнения уравнения Шредингера

$$\left[\, \partial_x^2 + x^{-1}\partial_x + x^{-2}\,\partial_\varphi^2 + q^2 - V(x) \,\right]\, \Psi(x, \varphi; q) = 0 \tag{2}$$

с асимптотическим граничным условием, содержащим амплитуду рассеяния $f(\varphi;q)$:

$$\Psi(x,\varphi;q) \to \exp(\imath q\, x\cos\varphi) + f(\varphi;q)\, x^{-1/2}\exp(\imath q x), \quad x\to\infty. \qquad (3)$$

Это уравнение подстановкой

$$\Psi(x,\varphi;q) = x^{-1/2}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} u_\lambda(x;q)\, y_\lambda(\varphi), \qquad y_\lambda(\varphi) \equiv (2\pi)^{-1/2}\exp[\,\imath(\lambda+1/2)\,\varphi\,] \qquad (4)$$

и последующим проецированием на функции y_λ сводится к бесконечной по номеру $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$ совокупности не связанных друг с другом одномерных уравнений Шредингера для искомых радиальных компонент u_λ:

$$\left[\,\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda+1)\,x^{-2} - V(x)\,\right] u_\lambda(x;q) = 0, \quad x \geqslant 0. \qquad (5)$$

Вследствие условий (1) и (3) компонента u_λ должна имеет асимптотику

$$u_\lambda(x;q) \to N(q)\,\frac{\rho^{\lambda+1}}{(2\lambda+1)!!}, \quad x\to 0, \qquad (6)$$

и асимптотику, содержащую разность $x_\lambda \equiv \rho - \pi\lambda/2$:

$$u_\lambda(x;q) \to \sin[x_\lambda + \delta_\lambda(q)] = \sin(x_\lambda)\cos\delta_\lambda(q) + \cos(x_\lambda)\sin\delta_\lambda(q), \quad x\to\infty. \qquad (7)$$

Функции $N(q)$ и $\delta_\lambda(q)$ аргумента q порождаются потенциалом V и называются парциальными нормировочным множителем и фазой рассеяния. Парциальные амплитуда f_λ и сечение σ_λ рассеяния определяются через фазу δ_λ формулами

$$f_\lambda(q) \equiv \left(\frac{1}{2\imath\pi q}\right)^{1/2}(2-\delta_{2\lambda,-1})\left\{\exp[2\imath\delta_\lambda(q)]-1\right\} = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2}\frac{2-\delta_{2\lambda,-1}}{\mathrm{ctg}\delta_\lambda(\mathrm{q})-\imath}, \qquad (8)$$

где $\delta_{2\lambda,-1}$ — символ Кронекера, и формулами

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \pi(2-\delta_{2\lambda,-1})|f_\lambda(q)|^2 = (4/q)(2-\delta_{2\lambda,-1})\,[\sin\delta_\lambda(q)]^2\,. \qquad (9)$$

Амплитуда $f(\varphi;q)$ и полное сечение $\sigma(q)$ рассеяния вычисляются как суммы

$$f(\varphi;q) = \sum_{\lambda=-1/2}^{\infty} f_\lambda(q)\cos[(\lambda+1/2)\varphi],$$

$$\sigma(q) \equiv \int_0^{2\pi}|f(\varphi;q)|^2 d\varphi = \sum_{\lambda=-1/2}^{\infty}\sigma_\lambda(q).$$

В задаче (5)–(7) заменим полуцелый индекс λ на целый индекс ℓ и положим $\ell = 0, 1, \ldots$. В результате получится получится задача Шредингера для радиальной компоненты u_ℓ волновой функции рассеяния квантовой частицы p_1 в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$. Эта компонента определяет рассеяние центральным короткодействующим потенциалом V в квантовом состоянии с заданным значением ℓ углового момента. Для такого состояния функция эффективного радиуса $K^s(q)$ определяется через парциальную фазу рассеяния $\delta_\ell(q)$ формулой [3, 5]

$$K^s(q) \equiv q^{2\ell+1} \operatorname{ctg} \delta_\ell(q) \tag{10}$$

и имеет низкоэнергетическую асимптотику [3]

$$K^s(q) = -1/a^s + (1/2)\, r^s_{\text{eff}}\, q^2 - (r^s_{\text{eff}})^3 P^s q^4 + O(q^6), \quad q \to 0, \tag{11}$$

где a^s, r^s_{eff} и P^s — длина рассеяния, эффективный радиус и параметр формы.

Далее пределом низких энергий называется предел малых положительных значений волнового числа q, а явными низкоэнергетическим приближением исследуемой функции считаем ее асимптотическое в этом пределе представление в виде конечной суммы по целым степеням аргумента q и элементарным функциям его логарифма.

Постановка нашей задачи такова: при условиях (1) для любого $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$ найти аналог $K(q)$ функции эффективного радиуса (10), а затем получить неявные и явные низкоэнергетические приближения функций $K(q)$, $\delta_\lambda(q)$, $f_\lambda(q)$, $\sigma_\lambda(q)$ и $u_\lambda(x; q)$.

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

Исследуемая задача рассеяния частицы аксиально-симметричным потенциалом представляется вполне правдоподобной как модель рассеяния атомов длинными линейными цепочками молекул.

Напомним, что каналированием называется процесс, при котором заряженные и даже нейтральные частицы проходят сквозь кристаллическую среду с наименьшими потерями энергии в каналах, образованных атомными рядами или плоскостями [7]. Суммарное воздействие атомов на каналируемую частицу описывается эффективным потенциалом, обладающим аксиальной симметрией по отношению к кристаллографической плоскости или оси. Чтобы упростить анализ каналирования, в работах [8, 9] эффективный потенциал аппроксимировался потенциалом гармонического осциллятора. Выход за рамки этого приближения не представляется возможным без знания строения волновых функций рассеяния частицы аксиально-симметричным коротко- и дальнодействующим потенциалами.

В настоящее время интенсивно развивается теоретическая и экспериментальная физика ультрахолодных газов в магнитных и лазерных ловушках [10, 11]. Для исследования столкновения двух атомов в таких ловушках широко применяется модель рассеяния двух квантовых частиц в двумерной плоскости трехмерного пространства. В этой модели, судя по работам [12–14] и обширному списку процитированных в них исследований, до сих пор используется давно известное приближение амплитуды $f_{-1/2}$ и сечения $\sigma_{-1/2}$ старшими слагаемыми их низкоэнергетических ($q = kd \to 0$) асимптотик [2], содержащих константу Эйлера γ и радиус действия d потенциала:

$$\begin{aligned} f_{-1/2}(q) &\approx -\left(\frac{\pi\imath}{2q}\right)^{1/2} \frac{1}{\ln(\imath\, q_0/q)}, \\ \sigma_{-1/2}(q) &\approx \frac{\pi^2}{q}\frac{1}{[\ln(q/q_0)]^2 + \pi^2/4}; \\ q_0 &\equiv 2\exp(-\gamma). \end{aligned} \tag{12}$$

Этот факт указывает на то, что более лучшие аппроксимации сечения $\sigma_{-1/2}$, содержащие в отличие от асимптотики (12) более подробную информацию о потенциале взаимодействия между частицами, по-видимому неизвестны.

Ввиду высказанных выше замечаний наш вывод и анализ низкоэнергетических асимптотик, более точных, чем приближения (12), представляются актуальными и интересными как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

2. СВОЙСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуем уравнение (5) в случае выключенного потенциала V. В этом случае функция V тождественно равна нулю, а уравнение (5) заменой

$$x \to \rho = qx, \quad u_\lambda(x;q) \to (\pi\rho/2)^{1/2}\, Z_m(\rho), \quad m = \lambda + 1/2,$$

сводится к известному в теории специальных функций [15] уравнению

$$\left[\rho^2\partial_\rho^2 + \rho\partial_\rho + 1 - m^2\right] Z_m(\rho) = 0, \quad \rho \geqslant 0, \tag{13}$$

линейно независимыми решениями которого являются функции Бесселя $J_m(\rho)$ и $Y_m(\rho)$ целого порядка $m = 0, 1, \ldots$ Следовательно, в случае выключенного потенциала уравнению (5) удовлетворяют линейно независимые функции j_λ и $\tilde{n}_\lambda$, связанные с функциями Бесселя $J_{\lambda+1/2}$ и $Y_{\lambda+1/2}$ соотношениями

$$j_\lambda(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} J_m(\rho), \quad \tilde{n}_\lambda(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2}\, Y_m(\rho), \quad m = \lambda + 1/2. \tag{14}$$

Перечислим необходимые нам свойства вспомогательных функций j_λ и $\tilde{n}_\lambda$, порожденные связями (14) и известными свойствами функций Беселя [15].

Вронскиан $W(j_\lambda, \tilde{n}_\lambda)$ системы $\{j_\lambda, \tilde{n}_\lambda\}$ тождественно равен единице:

$$W(j_\lambda, \tilde{n}_\lambda) \equiv \tilde{n}_\lambda(\rho)\partial_\rho j_\lambda(\rho) - j_\lambda(\rho)\, \partial_\rho \tilde{n}_\lambda(\rho) \equiv 1, \quad \rho \geqslant 0. \tag{15}$$

Функция j_λ является рядом

$$j_\lambda(\rho) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\rho^{\lambda+1}}{(2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1})!!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{2n}, \quad \rho > 0. \tag{16}$$

Коэффициенты a_n удобно вычислять по рекуррентным соотношениям

$$a_0 = 1; \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{2(n+1)(2\lambda+2n+3)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Функция $\tilde{n}_\lambda$ устроена более сложно, чем функция j_λ, потому что известное разложение функции $Y_{\lambda+1/2}$ целого порядка содержит в качестве слагаемого функцию

$$(2/\pi) \ln(\rho/2)\, J_{\lambda+1/2}(\rho),$$

а в качестве коэффициентов – логарифмическую производную ψ гамма-функции целого аргумента n и постоянную Эйлера γ:

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}, \quad \gamma \approx 0.5772156\ldots$$

Используя упомянутое разложение функции $Y_{\lambda+1/2}$, связи (14), ряд (16) и тождество

$$\ln(\rho/2) = \ln(qx/2) \equiv \ln(q/2) + \ln x,$$

получаем представление

$$\tilde{n}_\lambda(\rho) = n_\lambda(\rho) + h(q)\, j_\lambda(\rho), \tag{18}$$

в котором множитель $\ln(q/2)$ и константа Эйлера γ содержатся только в функции

$$h(q) \equiv (2/\pi)\, [\ln(q/2) + \gamma] = (2/\pi) \ln(q/q_0), \quad q_0 \equiv 2\exp(-\gamma), \tag{19}$$

а слагаемое $n_\lambda(\rho)$ является рядом

$$n_\lambda(\rho) \equiv -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(2\lambda-1+2\delta_{2\lambda,-1})!!}{\rho^\lambda} \times \\ \times \left[\sum_{n=0}^{\lambda-1/2} b_n \rho^{2n} - \rho^{2\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\, \rho^{2n}\right]. \tag{20}$$

В этом ряду при $\lambda = -1/2$ сумма слагаемых $b_n \rho^{2n}$ считается равной нулю, при любом $\lambda \geqslant 1/2$ коэффициенты b_n определяются рекуррентным образом:

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{2(n+1)(2\lambda-1-2n)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{21}$$

а функции $g_n(x)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \frac{2}{\pi\tau}\ln x; \\ g_n(x) &= \frac{2}{\pi\tau}a_n\left[\ln x - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{n+\lambda+1/2}\frac{1}{p}\right], \\ &n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{22}$$

в которых a_n — коэффициенты (17), а коэффициент τ зависит от индекса λ:

$$\tau \equiv (2/\pi)\,(2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1})!!\;(2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda,-1})!!. \tag{23}$$

Перепишем ряд (20) в более компактном виде

$$n_\lambda(\rho) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{(2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1})!!}{\rho^\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x)\,\rho^{2n}, \tag{24}$$

где функция $d_n(x)$ равна коэффициенту b_n, нулю или же функции $g_n(x)$:

$$\begin{aligned} &d_n(x) = b_n, \quad n = 0, 1, \dots, \lambda - 1/2; \quad d_{\lambda+1/2}(x) \equiv 0, \\ &d_n(x) = g_{n-\lambda-1/2}(x), \quad n = \lambda + 3/2, \lambda + 5/2, \dots \end{aligned} \tag{25}$$

В случае $\rho \to 0$ ряд (16) имеет равномерную относительно порядка λ асимптотику

$$\begin{aligned} j_\lambda(\rho) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}&\frac{\rho^{\lambda+1}}{(2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda-1})!!}\times \\ &\times\left[1 - \frac{\rho^2}{4(2\lambda+3)} + \frac{\rho^4}{8(2\lambda+3)(2\lambda+5)} + O(\rho^6)\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

При $\rho \to 0$ асимптотика ряда (24) зависит от значения индекса λ: в случае $\lambda = -1/2$

$$n_\lambda(\rho) = \left(\frac{2\rho}{\pi}\right)^{1/2}\left[\ln x - \frac{\rho^2}{4}(\ln x - 1) + \frac{\rho^4}{64}(\ln x - \frac{3}{2}) + O(\rho^6 \ln x)\right]; \tag{27}$$

в случае $\lambda = 1/2$

$$n_\lambda(\rho) = -\left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{\rho^2}{2}\ln x + \frac{\rho^4}{16}(\ln x - \frac{5}{4}) + O(\rho^6 \ln x)\right]; \tag{28}$$

если $\lambda = 3/2$, то

$$n_\lambda(\rho) = -\left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2} \frac{2}{\rho}\left[1 - \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{16}\ln\, x + O(\rho^6 \ln\, x)\right], \tag{29}$$

если же $\lambda \geqslant 5/2$, то

$$n_\lambda(\rho) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(2\lambda-1)!!}{\rho^\lambda}\times \\ \times\left[1 + \frac{\rho^2}{2(2\lambda-1)} + \frac{\rho^4}{8(2\lambda-1)(2\lambda-3)} + O(\rho^6)\right]. \tag{30}$$

В пределе $\rho/|\lambda| \to \infty$ асимптотики функций (14) осциллируют:

$$j_\lambda(\rho) \sim \sin\, x_\lambda, \quad \tilde{n}_\lambda(\rho) \sim -\cos\, x_\lambda; \quad x_\lambda \equiv \rho - \pi\lambda/2. \tag{31}$$

3. ЛИНЕЙНАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Сведем исходную задачу (5)–(7) к следующей системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \partial_r \tilde{c}(x;q) &= -q^{-1}V(x)\left[\tilde{c}(x;q)j_\lambda(\rho) - s(x;q)\tilde{n}_\lambda(\rho)\right]\tilde{n}_\lambda(\rho), \\ \partial_x s(x;q) &= -q^{-1}V(x)\left[\tilde{c}(x;q)j_\lambda(\rho) - s(x;q)\tilde{n}_\lambda(\rho)\right]j_\lambda(\rho), \quad x > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Затем покажем, что искомые функций c и s подчиняются граничным условиям

$$\tilde{c}(x;q) = 1, \quad s(x;q) = 0, \quad x = 0. \tag{33}$$

Систему (32) можно получить, применив линейную версию метода фазовых функций двумя способами. Первый способ является аналогом подхода, описанного в монографии [16] для случая центрального потенциала, и основан на интегральных представлениях функций $\tilde{c}$ и s через функции j_λ, $\tilde{n}_\lambda$ и u_λ. Второй способ известен в теории дифференциальных уравнений [17] как метод вариации постоянных коэффициентов. Реализуем этот метод по той же схеме, что и в случае центрального потенциала [1].

Функции j_λ и $\tilde{n}_\lambda$ используем в качестве известных решений уравнения (5) в случае выключенного потенциала V. Искомые функции $\tilde{c}$ и s подчиним тождеству Лагранжа

$$j_\lambda(\rho)\,\partial_x\tilde{c}(x;q) - \tilde{n}_\lambda(\rho)\partial_x s(x;q) \equiv 0, \quad x \geqslant 0. \tag{34}$$

Заметим, что из этого тождества следуют два представления:

$$\partial_x s(x;q) = \frac{j_\lambda(\rho)}{\tilde{n}_\lambda(\rho)} \partial_x \tilde{c}(x;q), \quad \partial_x \tilde{c}(x;q) = \frac{\tilde{n}_\lambda(\rho)}{j_\lambda(\rho)} \partial_x s(x;q), \quad x \geqslant 0. \tag{35}$$

Решение u_λ задачи (5)–(7) будем искать в виде произведения нормировочного множителя N и вспомогательной функции U:

$$u_\lambda(x;q) = N(q)\tilde{U}(x;q), \quad \tilde{U}(x;q) \equiv \tilde{c}(x;q)\, j_\lambda(\rho) - s(x;q)\tilde{n}_\lambda(\rho). \tag{36}$$

В уравнении (5) заменим функцию u_λ таким произведением. Используя уравнение Бесселя (13) и тождество (34), сведем полученное соотношение к уравнению

$$\partial_x \tilde{c}(x;q)\partial_\rho j_\lambda(\rho) - \partial_x s(x;q)\partial_\rho \tilde{n}_\lambda(\rho) = \\ = q^{-1}V(x)\left[\tilde{c}(x;q)\, j_\lambda(\rho) - s(x;q)\tilde{n}_\lambda(\rho)\right]. \tag{37}$$

Исключим из этого уравнения производную $\partial_x s$. Для этого применим первое из двух равенств (35). Полученное уравнение упростим, используя соотношение Вронского (15). В результате выведем первое уравнение системы (32). Ее второе уравнение выводится аналогичным способом. Сначала с помощью второго из двух равенств (35) уравнение (37) сводится к уравнению, не содержащему производную $\partial_x c$. Затем показывается, что, благодаря соотношению Вронского (15), полученное уравнение является вторым уравнением системы (32).

Сделаем два важных замечания. Во-первых, выбор граничных условий (33) для компонент c и s не случаен: только при таких условиях произведение (36) имеет нужную асимптотику (6). Во-вторых, при ограничениях (1), наложенных на функцию V, задача Коши (32), (33) однозначно разрешима, компоненты $\tilde{c}$ и s ее решения $\{\tilde{c}, s\}$ являются всюду $(x \geqslant 0)$ непрерывно дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными функциями. Это утверждение следует из упомянутых выше интегральных представлений компонент $\tilde{c}$ и s через функции j_λ, $\tilde{n}_\lambda$ и u_λ и однозначной разрешимости [4] задачи Шредингера (5) – (7) с условиями (1).

Далее для сокращения записи символом $z(q)$ обозначаем предельное при $x \to \infty$ значение $z(\infty;q)$ исследуемой функции $z(x;q)$.

Определим множитель $N(q)$ и фазу $\delta_\lambda(q)$ через компоненты $\tilde{c}$ и s. Для этого сначала найдем асимптотику функции (36) в пределе $x \to \infty$. В этом пределе функции j_λ и $\tilde{n}_\lambda$ имеют асимптотики (31), а компоненты $\tilde{c}$ и s ограничены, поэтому

$$u_\lambda(x;q) \sim N(q)\tilde{c}(x;q)\sin(x_\lambda) + N(q)\, s(x;q)\cos(x_\lambda), \\ x_\lambda = \rho - \pi\lambda/2, \quad x \to \infty.$$

Заметим, что полученная асимптотика совпадает с требуемой асимптотикой (7) тогда и только тогда, когда выполняются следующие два предельных соотношения:

$$\lim_{x\to\infty} N(q)\,\tilde{c}(x;q) = \cos\,\delta_\lambda(q), \qquad \lim_{x\to\infty} N(q)\,s(x;q) = \sin\,\delta_\lambda(q).$$

Следовательно, нормировочный множитель $N(q)$ определяется формулами

$$N(q) = \lim_{x\to\infty} N(x;q), \quad N(x;q) \equiv \left[\tilde{c}^2(x;q) + s^2(x;q)\right]^{-1/2}, \tag{38}$$

а тангенс фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ – формулами

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q), \quad \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q) \equiv s(x;q)/\tilde{c}(x;q). \tag{39}$$

Напомним, что согласно представлению (18) функция $\tilde{n}_\lambda$ содержит неаналитический по аргументу q множитель $h(q)$, определенный формулами (19). Следовательно, этот же множитель содержат и функции $\tilde{c}$, U_λ, u_λ, N, $\operatorname{tg}\delta_\lambda$, f_λ и σ_λ. Наша следующая задача — получить для этих функций представления, в которых множитель $h(q)$ выделен в явном виде.

Приступим к решению. Применим известный способ [6, 18]: в представлении (36) функции u_λ и в задаче Коши (32), (33) заменим функцию $\tilde{n}_\lambda$ известной суммой (18), а функцию $\tilde{c}$ — искомой суммой

$$\tilde{c}(x;q) = c(x;q) + h(q)s(x;q). \tag{40}$$

Приведя подробные слагаемые, для функция u_λ получим представление

$$u_\lambda(x;q) = N(q)\,U(x;q), \quad U(x;q) \equiv c(x;q)\,j_\lambda(\rho) - s(x;q)\,n_\lambda(\rho), \tag{41}$$

в котором функции c и s подчиняются системе двух уравнений

$$\begin{aligned} &\partial_r c(x;q) = -q^{-1}V(x)\,[c(x;q)\,j_\lambda(\rho) - s(x;q)\,n_\lambda(\rho)]\;n_\lambda(\rho), \\ &\partial_x s(x;q) = -q^{-1}V(x)\,[c(x;q)\,j_\lambda(\rho) - s(x;q)\,n_\lambda(\rho)]\;j_\lambda(\rho), \quad x>0, \end{aligned} \tag{42}$$

с граничными условиями

$$c(x;q) = 1, \quad s(x;q) = 0, \quad x = 0. \tag{43}$$

Далее, заменив в равенствах (38) и (39) функцию $\tilde{c}$ суммой (40), убедимся в том, что теперь нормировочный множитель определяется формулами

$$\begin{gathered} N(q) = \lim_{x\to\infty} N(x;q), \\ N(x;q) \equiv \{[c(x;q){+}h(q)s(x;q)]^2 + s^2(x;q)\}^{-1/2}, \end{gathered} \tag{44}$$

а тангенс фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ — формулами

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q),\\ \operatorname{tg}\delta_\lambda(x;q) \equiv s(x;q)/\left[c(x;q) + h(q)s(x;q)\right].\end{gathered} \tag{45}$$

Используя эти формулы и представления (8) и (9), выразим через функции c, s и множитель h парциальную амплитуду

$$\begin{gathered}f_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty} f_\lambda(x;q),\\ f_\lambda(x;q) = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2} \frac{(2-\delta_{2\lambda,-1})\,s(x;q)}{c(x;q) + [h(q) - \imath]\ s(x;q)},\end{gathered} \tag{46}$$

а затем и парциальное сечение

$$\sigma_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty} \sigma_\lambda(x;q), \quad \sigma_\lambda(x;q) \equiv (2-\delta_{2\lambda,-1})\,q^{-1}\left[2s(x;q)N(x;q)\right]^2. \tag{47}$$

Завершим настоящий раздел следующими замечаниями.

Представление (41) означает, что при любом фиксированном значении аргумента x компоненты $c(x;q)$ и $s(x;q)$ являются амплитудами, с которыми вспомогательные функции j_λ и n_λ содержатся в функции u_λ. Поэтому далее эти компоненты называются амплитудными функциями.

Определенные формулами (44)–(47) функции N, $\mathrm{tg}\delta_\lambda$, f_λ и σ_λ аргумента x и параметра q имеют прозрачный физический смысл: их значения в любой точке $x = b$ равны нормировочному множителю, тангенсу фазы, амплитуде и сечению в случае потенциала $V(x)$, «обрезанного» в этой точке.

В пределе $q \to 0$ параметр $1/q$ системы (42) бесконечно возрастет. Поэтому ее численное интегрирование с приемлемой точностью становится сложной вычислительной проблемой. Используя решение $\{c, s\}$ этой системы и представления (41) и (45)–(47) нельзя найти явные низкоэнергетические приближения функций u_λ, фаз δ_λ, амплитуд f_λ и сечений σ_λ ни при одном значении λ. По этим причинам для построения приближений такого типа требуются специальные методы. Такой метод предлагается ниже и начинается с анализа свойств амплитудных функций.

4. СВОЙСТВА АМПЛИТУДНЫХ ФУНКЦИЙ

Амплитудные функции и s подчиняются уравнениям (42), в которых функции j_λ, и n_λ не содержат множителя $h(q)$ и являются сходящимися рядами (16) и (24) по положительным степеням параметра q. Следовательно, амплитудные функции должны быть рядами такого же типа. Докажем это утверждение, следуя работам [6, 18].

В системе уравнений (42) и в ее граничных условиях (43) заменим функции j_λ, и n_λ соответствующими рядами (16) и (24), а амплитудные функции c и s представим в виде искомых разложений

$$
\begin{aligned}
&c(x;q) = (2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1})!! \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} c_n(x), \\
&s(x;q) = q^{2\lambda+1}\bar{s}(x,q), \quad \bar{s}(x,q) \equiv \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1})!!}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} s_n(x).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Получившиеся равенства запишем в виде бесконечных полиномов по четным степеням параметра q. Благодаря линейной независимости системы $\{q^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ степенных функций q^{2n} эти полиномы тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю все их «коэффициенты», зависящие лишь от переменной x. Применив это правило, получаем рекуррентную цепочку уравнений для компонент c_n и s_n:

$$
\begin{aligned}
\partial_x c_n(x) = {} & \frac{xV(x)}{2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1}} \times \\
& \times \sum_{p+i+j=n} x^{2(p+i)}\, d_p(x) \left[a_i\, c_j(x) + x^{-2\lambda-1}\, d_i(x)\, s_j(x)\right], \\
\partial_x s_n(x) = {} & -\frac{x^{2\lambda+2}V(x)}{2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1}} \times \\
& \times \sum_{p+i+j=n} x^{2(p+i)}\, a_p \left[a_i\, c_j(x) + x^{-2\lambda-1}\, d_i(x)\, s_j(x)\right], \quad x > 0,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

и находим для этих компонент следующие граничные условия:

$$
c_0(x) = 1, \quad c_{n+1}(x) = 0, \quad s_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad x = 0. \tag{50}
$$

Обсудим строение цепочки краевых задач Коши (49), (50). В отличие от исходной задачи (42), (43) эта цепочка не содержит волновое число q и поэтому называется энергонезависимой. Первая система (49) имеет номер $n = 0$ и является однородной. Каждая последующая система (49) с данным номером $n > 0$ является неоднородной, потому что правые части обоих ее уравнений содержат обе компоненты c_m и s_m решений $\{c_m, s_m\}$ всех предыдущих систем с номером $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Согласно формулам (27)–(30) слагаемое разложения функции n_λ, содержащее логарифмическую функцию $y(x) \equiv \ln x$, пропорционально произведению $(qx)^{2n}\, y(x)$, в котором $n = \lambda + 1/2$. Поэтому правые части системы уравнений (49) для функций c_n и s_n содержат функцию $y(x)$, если $n \geqslant \lambda + 1/2$, и не содержат в противном случае.

Поясним перечисленные выше особенности строения цепочки уравнений (49) на примере ее трех систем с номером $n = 0, 1, 2$. Для краткости записи аргумент x функций $V(x)$, $c_n(x)$, $s_n(x)$ и $y(x)$ не указываем.

В случае $\lambda = -1/2$ правые части систем $n = 0, 1, 2$ содержат логарифм y, первая система $(n = 0)$ является однородной:

$$\partial_x c_0 = -Vxy\,(c_0 - ys_0\,)\,, \quad \partial_x s_0 = -Vx\,\,(c_0 - ys_0\,)\,; \tag{51}$$

вторая система $(n = 1)$ содержит компоненты c_0 и s_0 решения $\{c_0, s_0\}$ первой системы:

$$\partial_x c_1 = V\left\{[\,-xy\,(c_1 - ys_1)] + \frac{x^3}{4}\,[(2y-1)c_0 + 2(1-y)ys_0]\right\},$$
$$\partial_x s_1 = -V\left\{x\,(c_1 - ys_1) - \frac{x^3}{4}\,[2c_0 + (1-2y)s_0]\right\},$$

а третья система $(n = 2)$ состоит из уравнения

$$\partial_x c_2 = V\left\{[-xy\,(c_2 - ys_2)\,] + \frac{x^3}{4}\,[(2y-1)c_1 + 2(1-y)ys_1] - \right.$$
$$\left. - \,\frac{x^5}{128}\left[(3y-11)c_0 + (4y^2 - 22y + 8)s_0\right]\right\}$$

и уравнения

$$\partial_x s_2 = -V\left\{x(c_2 - ys_2) - \frac{x^3}{4}\,[2c_1 + (1-2y)s_1] + \frac{x^5}{128}[12c_0 + (11-4y)s_0]\right\}.$$

Начиная с $\lambda = 1/2$, оба уравнения первой системы не содержат логарифм y:

$$\begin{aligned}\partial_x c_0 &= \frac{V}{2\lambda+1}\left(xc_0 + x^{-2\lambda}s_0\right),\\ \partial_x s_0 &= -\frac{V}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1}\left(xc_0 + x^{-2\lambda}s_0\right), \quad \lambda \geqslant \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{52}$$

При $\lambda = 1/2$ вторая система имеет вид

$$\partial_x c_1 = (V/16)\left[8(xc_1 + s_1/x) - x^3(4y+1)c_0 - 8xys_0\right]$$
$$\partial_x s_1 = -(Vx^2/16)\left[8(xc_1 + s_1/x) - 2x^3c_0 - x(4y+1)s_0\right],$$

а третью систему составляют уравнение

$$\partial_x c_2 = (V/16)\left[8(xc_2 + s_2/x) - x^3(4y+1)c_1 - 8xys_1 + \right.$$
$$\left. + (x^5/12)\,(12y-7)c_0 + (x^3/4)\,(8y^2 + 4y - 5)s_0\right]$$

и уравнение

$$\partial_x s_2 = -(Vx^2/16)\left[8(xc_2 + s_2/x) - 2x^3c_1 - x(4y+1)s_1 + \right.$$
$$\left. +(x^5/24)c_0 + (x^3/12)(12y-7)s_0\right]$$

Начиная с $\lambda = 3/2$, оба уравнения второй системы содержат лишь целые степени аргумента x и записываются в виде

$$\partial_x c_1 = \frac{V}{2\lambda+1}\left[xc_1 + x^{-2\lambda}s_1 + \frac{x^2}{2\lambda-1}\left(\frac{2}{2\lambda+3}\,xc_0 + x^{-2\lambda}s_0\right)\right],$$
$$\partial_r s_1 = -\frac{V}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1}\left[xc_1 + x^{-2\lambda}s_1 - \frac{x^2}{2\lambda+3}\left(xc_0 - \frac{2}{2\lambda-1}\,x^{-2\lambda}s_0\right)\right],$$
$$\lambda \geqslant \frac{3}{2}.$$

В случае $\lambda = 3/2$ первым уравнением третьей системы является уравнение

$$\partial_x c_2 = (V/24)\left[6(xc_2 + s_2/x^3) + x^3c_1 + 3s_1/x - \right.$$
$$\left. -(x^5/64)\,(7+24y)c_0 + (3x/8)\,(1-2y)s_0\right]$$

а вторым — уравнение

$$\partial_x s_2 = -(Vx^4/6)\left[6(xc_2 + s_2/x^3) - x^3c_1 + s_1/x + \right.$$
$$\left. +(7x^5/96)c_0 - (3x/182)(24y+7)s_0\right].$$

В оставшемся случае $\lambda \geqslant 5/2$ вторую систему образуют уравнение

$$\partial_x c_2 = \frac{V}{2\lambda+1}\left\{xc_2 + x^{-2\lambda}s_2 + \frac{x^2}{2\lambda-1}\left(\frac{2}{2\lambda+3}\,xc_1 + x^{-2\lambda}s_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)}\left[\frac{6}{(2\lambda+3)(2\lambda+5)}\,xc_0 + \frac{\lambda-1}{2\lambda-1}\,x^{-2\lambda}s_0\right]\right\},$$

и уравнение

$$\partial_x s_2 = -\frac{V}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1}\left\{xc_2 + x^{-2\lambda}s_2 - \frac{x^2}{2\lambda+3}\left(xc_1 - \frac{2}{2\lambda-1}\,x^{-2\lambda}s_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{(2\lambda+3)(2\lambda+5)}\left[\frac{\lambda+2}{2\lambda+3}\,xc_0 + \frac{6}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)}\,x^{-2\lambda}s_0\right]\right\}.$$

Стоит отметить, что при условиях (1) обсуждаемая задача Коши (49), (50) однозначно разрешима, все компоненты ее решения $\{c_n, s_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются всюду ($x \geqslant 0$) непрерывно дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными функциями:

$$|c_n(x)| < \infty, \quad |s_n(x)| < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad x \geqslant 0. \tag{53}$$

Эти утверждения несложно доказать по индукции, использовав при малых и больших значениях аргумента $0 \leqslant x \leqslant x_1$ и $x_2 \leqslant x < \infty$ метод последовательных приближений [19] и применив в промежуточной области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ известную теорему Пеано [17]. Доказательство, выполненное по такой схеме для системы того же типа, что и система (52), дано в работе [20].

Решение $\{c_0, s_0\}$ системы (51) или (52) обладает важным свойством

$$c_0^2(x;q) + s_0^2(x;q) \neq 0, \quad x \geqslant 0. \tag{54}$$

Оно означает, что не существует точки $x = b$, в которой обе компоненты c_0 и s_0 равны нулю. Докажем это утверждение от противного. Пусть при некотором значении b аргумента x выполняются оба равенства $c_0(b) = 0$ и $s_0(b) = 0$. Используем их как граничные условия для системы (51) или (52) в точке $x = b$. При ограничениях (1) поставленная таким образом краевая однозначно разрешима в области $0 \leqslant x \leqslant \infty$, причем ее решение является тривиальным: $c_0(x) \equiv 0$ и $s_0(x) \equiv 0$ при любом $x \geqslant 0$, в том числе и в точке $x = 0$. Согласно (50) в этой точке компонента c_0 равна единице, а не нулю. Полученное противоречие доказывает ранее высказанное утверждение (54).

Следовательно, возможны три случая: обе функции c_0 и s_0 не имеют нулей на всей полуоси $x > 0$; в некоторой точке $x = b$, например, при $x = \infty$, функция s_0 равна нулю, тогда $c_0(b) \neq 0$ и наоборот, $c_0(b) = 0$, но $s_0(b) \neq 0$. Полное решение задачи о числе и положении нулей функций $c_0(x)$ и $s_0(x)$ представляется возможным лишь путем численного анализа системы (51) или же системы (52).

Теперь запишем ряды (48) в виде разбиений

$$\begin{aligned}
&c(x;q) = c^{(2)}(x;q) + {}^{(2)}c(x;q), \quad c^{(2)}(x;q) \equiv \sum_{n=0}^{2} q^{2n}\, c_n(x);\\
&s(x;q) = s^{(2)}(x;q) + {}^{(2)}s(x;q),\\
&s^{(2)}(x;q) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{q^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1})!!} \sum_{n=0}^{2} q^{2n}\, s_n(r)
\end{aligned} \tag{55}$$

и оценим остаточные члены ${}^{(2)}c$ и ${}^{(2)}s$ в пределе $q \to 0$. Для этого в задаче (42), (43) заменим функции j_λ, n_λ и c, s соответствующими суммами (26), (27)–(30) и (55). Затем, используя системы (49) с номерами $n \leqslant m$, приведем подобные слагаемые. В результате получим систему двух неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка для функций ${}^{(2)}c$ и

${}^{(2)}s$, равных нулю в точке $x = 0$. Эту краевую задачу запишем в виде системы двух интегральных уравнений. Применив к такой системе метод последовательных приближений [19], убедимся в том, что, благодаря соотношениям (1) и (53), верны следующие асимптотические оценки

$$ {}^{(2)}c(x;q) = O(q^6), \quad {}^{(2)}s(x;q) = O(q^{2\lambda+7}), \quad x \geqslant 0; \quad q \to 0. \tag{56} $$

Следовательно, конечные подсуммы $c^{(2)}(x;q)$ и $s^{(2)}(x;q)$ рядов (48) — явные низкоэнергетические ($q \to 0$) приближения функций $c(r;k)$ и $s(r;k)$ при любом значении их аргумента $x > 0$, в том числе и в точке $x = \infty$.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Приступим к выводу и анализу низкоэнергетических приближений, предполагая что обе функции $c_0(x)$ и $s_0(x)$ не равны нулю в пределе $x \to \infty$. Все остальные случаи требуют исследования амплитудных функций $c(x;q)$ и $s(x;q)$ с комплекснозначным параметром q, что согласно разд. 1, выходит за рамки нашей основной задачи.

В правых частях равенств (44)–(47) заменим функции c и s их приближениями $c^{(2)}$ и $s^{(2)}$. Затем перейдем к пределу $x \to \infty$. Полученные таким способом функции обозначим соответствующими символами $\tilde{N}(q)$, $\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q)$, $\tilde{f}_\lambda(q)$ и $\tilde{\sigma}_\lambda(q)$. Используя разбиения (55) и оценки (56) нетрудно показать, что при любом $\lambda \geqslant -1/2$ эти функции являются неявными низкоэнергетическими приближениями соответствующих функций $N(q)$, $\operatorname{tg}\delta_\lambda(q)$, $f_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ с относительной точностью ε порядка $O(q^6)$:

$$ \begin{aligned} &N(q)/\tilde{N}(q), \quad \operatorname{tg}\delta_\lambda(q)/\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q), \quad f_\lambda(q)/\tilde{f}_\lambda(q), \\ &\sigma_\lambda(q)/\tilde{\sigma}_\lambda(q) = 1 + O(q^6); \quad q \to 0. \end{aligned} $$

Все такие приближения содержат шесть коэффициентов c_n и s_n, равных значениям компонент $c_n(x)$ и $s_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, в точке $x = \infty$. Эти коэффициенты, по-видимому, не имеют какого-либо физического смысла. Поэтому стоит вывести низкоэнергетические приближения, параметризованные через три такие комбинации a, r_{eff} и P коэффициентов c_n и s_n, которые допускают ясную физическую интерпретацию.

Решение сформулированной выше задачи начнем с исследования ключевых для дальнейшего анализа функций $K(q)$ и $K(x;q)$, определенных формулами

$$ K(q) \equiv \lim_{x\to\infty} K(x;q), \quad K(x;q) \equiv q^{2\lambda+1}\left[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(x;q) - h(q)\right]. \tag{57} $$

Заметим, что вследствие представлений (45) и (48) верны равенства

$$ K(x;q) = q^{2\lambda+1}\, c(x;q)/s(x;q) = c(x;q)/\bar{s}(x;q). \tag{58} $$

В последнем из них заменим функции c и $\bar{s}$ их разложениями (48). Согласно полученному таким образом представлению $K(x;q)$ является функцией двух аргументов: x и $v = q^2$. Разложив эту функцию в ряд Тейлора по аргументу v с центром в точке $v = 0$, получаем равномерную по аргументу x асимптотику

$$K(x;q) = K^{(2)}(x;q) + O(q^6), \quad K^{(2)}(x;q) \equiv \tau \sum_{n=0}^{2} K_n(x)\, q^{2n}, \quad q \to 0. \tag{59}$$

В этой асимптотике $x > 0$, множитель τ определен формулой (23), каждая функция $K_n(x)$, $n \geqslant 0$, представляется конечной суммой дробей, знаменатели которых – целые степени $s_0^p(x)$, $p \leqslant 2n$, а числители выражаются через компоненты $c_m(x)$ и $s_m(x)$ с номерами $m \leqslant n$. Не указывая аргумент x функций $K_n(x)$, $c_m(x)$ и $s_m(x)$, приведем примеры таких представлений:

$$\begin{aligned} &K_0 = c_0/s_0, \quad K_1 = (c_1 - s_1 K_0)/s_0, \\ &K_2 = (c_2 - s_2 K_0 - s_1 K_1)/s_0, \\ &K_3 = (c_3 - s_3 K_0 - s_2 K_1 - s_1 K_2)/s_0. \end{aligned} \tag{60}$$

Вместо функции $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, далее используем функции a, r_{eff} и P, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv -\frac{1}{\tau K_0(x)} = -\frac{s_0(x)}{\tau c_0(x)}, \\ r_{\text{eff}}(x) &\equiv 2\tau\, K_1(x), \\ P(x) &\equiv -\tau \frac{K_2(x)}{r_{\text{eff}}^3(x)}. \end{aligned} \tag{61}$$

Согласно неравенствам (53) все компоненты c_n и s_n являются всюду ограниченными функциям. По предположению $c_0(\infty) \neq 0$ и $s_0(\infty) \neq 0$. Следовательно, все функции K_n, a, r_{eff} и P ограничены в пределе $x \to \infty$. Поэтому и в асимптотике (59), и в определениях (61) можно положить $x = \infty$. В результате получится следующее асимптотическое представление предела $K(q)$ исследуемой функции $K(x;q)$

$$\begin{aligned} K(q) = \frac{c(q)}{\bar{s}(q)} = \tau \sum_{n=0}^{\infty} K_n\, q^{2n} = \\ = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}}\, q^2 - r_{\text{eff}}^3\, P\, q^4 + O(q^6), \quad q \to 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Выясним физический смысл функции $K(q)$ волнового числа q и коэффициентов a, r_{eff} и P. Для этого сравним определения (10) и (57) функций

$K^s(q)$ и $K(q)$ и их асимптотики (11) и (62). Оба определения содержат произведения целых степеней и котангенсов соответствующих волновых чисел и парциальных фаз. Обе обсуждаемые функции являются бесконечными рядами по целым степеням аргумента q^2 и имеют однотипные асимптотики. В силу такого сходства функцию $K(q)$ и коэффициенты a, r_{eff} и P ее разложения (62) представляется логичным назвать соответственно функцией эффективного радиуса, длиной рассеяния, эффективным радиусом взаимодействия и параметром формы в исследуемом случае аксиально-симметричного короткодействующего потенциала V. Функции (61) имеет прозрачный физический смысл: их значения $a(b)$, $r_{\text{eff}}(b)$ и $P(b)$ в любой точке $x = b$ являются длиной рассеяния, эффективным радиусом взаимодействия и параметром формы в случае потенциала $V(x)$, «обрезанного» в этой точке.

Применим исследованные выше функции (57), (58) и их асимптотики (59), (62) следующим образом. Правые части равенств (45)–(47) выразим через функцию $K(x;q)$ и перейдем к пределу $x \to \infty$. Полученные таким способом выражения обозначим соответствующими символами $\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q)$, $\tilde{f}_\lambda(q)$ и $\tilde{\sigma}_\lambda(q)$ и запишем в виде, наиболее удобном для их практического применения и дальнейшего исследования. Функцию $\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q)$ представим дробью

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q) = v(q) \equiv \frac{-aq^{2\lambda+1}}{1 + ag(q) - a\,q^{2\lambda+1}\,h(q)},\\ g(q) \equiv -q^2\left(1/2 - r_{\text{eff}}^2 P\,q^2\right)\,r_{\text{eff}}.\end{gathered} \tag{63}$$

Тогда функцию $\tilde{f}_\lambda(q)$ можно будет вычислять по формуле

$$\tilde{f}_\lambda(q) = -(2 - \delta_{2\lambda,-1})\left(\frac{2\imath}{\pi}\right)^{1/2}\frac{aq^{2\lambda+1/2}}{1 + ag(q) - aq^{2\lambda+1}\left[h(q) - \imath\right]}. \tag{64}$$

В силу этого равенства и связи (9) сечения $\sigma_\lambda(q)$ с амплитудой $f_\lambda(q)$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_\lambda(q) = \pi(2 - \delta_{2\lambda,-1})\,|\tilde{f}_\lambda(q)|^2 = \pi\,(2 - \delta_{2\lambda,-1})\times\\ \times\frac{a^2\,q^{4\lambda+1}}{\left[1 + ag(q) - aq^{2\lambda+1}h(q)\right] + a^2}.\end{aligned} \tag{65}$$

Так как остаточный член асимптотики (62) убывает как $O(q^6)$, то функции $\operatorname{tg}\tilde{\delta}_\lambda(q)$, $\tilde{f}_\lambda(q)$ и $\tilde{\sigma}_\lambda(q)$ являются неявными низкоэнергетическими приближениями соответствующих функций $\operatorname{tg}\delta_\lambda(q)$, $f_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ с относительной точностью порядка $O(q^6)$.

Теперь из полученных приближений (63)–(65) выведем явные низкоэнергетические асимптотики функций $\delta_\lambda(q)$, $f_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ волнового числа q. Решение такой задачи существенно затрудняется наличием в этих приближениях логарифмической функции $h(q)$, производные которой любого порядка неограниченно возрастают или же убывают в пределе $q \to 0$. Поэтому функции (63)–(65) аргумента q нельзя представить рядом Тейлора по переменной q с центром в точке $q = 0$. Чтобы преодолеть эту трудность, применим известный асимптотический метод [21] по следующей схеме. Рассмотрим два случая $\lambda = -1/2$ и $\lambda \geqslant 1/2$. В каждом из них сначала введем переменную $w(q)$, содержащую функции $h(q)$ и $g(q)$, и сходящуюся к нулю в пределе $q \to 0$. Затем исследуемую функцию $\delta_\lambda(q)$, $f_\lambda(q)$ или $\sigma_\lambda(q)$ представим в виде функции аргумента w. Такую функцию аппроксимируем конечной суммой ее ряда Тейлора с центром в точке $w = 0$. Наконец, упростим полученную сумму, приведя подобные слагаемые с одинаковой зависимость от четных степеней аргумента q. Для сокращения записи аргумент q функций g, h, v и w не указываем.

Начнем с анализа парциальной фазы $\delta_\lambda(q)$. Используя формулы (63), представим ее рядом Тейлора по переменной v с центром в точке $v = 0$:

$$\delta_\lambda(q) = \operatorname{arctg} v(q) = \left(1 - \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{5}v^4 - \ldots\right)\left[1 + O(q^6)\right].$$

В этом соотношении в случае $\lambda = -1/2$ положим

$$w \equiv \frac{ag}{1 - ah}, \quad v = -\frac{a}{1 - ah}\frac{1}{1 + w} = -\frac{a}{1 - ah}\left(1 - w + w^2 - w^3 + \ldots\right),$$

а в случае $\lambda \geqslant 1/2$ используем подстановку

$$w \equiv -\frac{aq^{2\lambda+1}h}{1 + ag}, \quad v = -\frac{aq^{2\lambda+1}}{1 + ag}\frac{1}{1 + w} = -\frac{aq^{2\lambda+1}}{1 + ag}\left(1 - w + w^2 - w^3 + \ldots\right).$$

Приведя в получившихся представлениях слагаемые, пропорциональные степеням q^0, q^2 и q^4, получаем следующие явные асимптотики фазы $\delta_\lambda(q)$. В случае $\lambda = -1/2$

$$\delta_\lambda(q) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{ah - 1}\right) - \frac{1}{2}\frac{a^2\, r_{\text{eff}}}{(ah - 1)^2 + a^2}\times$$
$$\times \sum_{n=1}^{2} D_1(h)\, q^{2n} + O\left(\frac{q^6}{h^2}\right), \quad q \to 0, \quad (66)$$

где $D_1 = 1$, а D_2 — дробно-рациональная функция переменной $h(q)$:

$$D_2(h) = -r_{\text{eff}}\frac{\left[4a^2 r_{\text{eff}} P(h^2 + 1) + ah(a - 8r_{\text{eff}}P) - a + 4r_{\text{eff}}P\right]}{2\left[(ah - 1)^2 + a^2\right]};$$

а в случае $\lambda \geqslant 1/2$

$$\delta_\lambda(q) = \delta_\lambda^{(2)}(q)(1 + \varepsilon), \quad \delta_\lambda^{(2)}(q) \equiv -a\, q^{2\lambda+1}\sum_{n=0}^{2} D_n(h)\, q^{2n}, \quad q \to 0, \quad (67)$$

где $D_0 = 1$, D_1 и D_2 — полиномы аргумента $h(q)$:

$$D_1(h) = a\left[r_{\rm eff}/2 + h\,\delta_{2\lambda,1}\right],$$
$$D_2(h) = a\,r_{\rm eff}^2\,(a/4 - r_{\rm eff}P) + a\left[h^2 + r_{\rm eff}h - 1/3\right]\delta_{2\lambda,1} + ah\,\delta_{2\lambda,3},$$

а относительная ошибка ε приближения $\delta_\lambda(q) \approx \delta_\lambda^{(2)}(q)$ зависит от λ и q:

$$\begin{aligned} &\varepsilon = O\left(q^6 h^3(q)\right), \quad \lambda = 1/2; \qquad \varepsilon = O\left(q^6 h(q)\right), \\ &\lambda = 3/2, 5/2; \qquad \varepsilon = O\left(q^6\right), \quad \lambda \geqslant 7/2. \end{aligned} \tag{68}$$

Исследование парциальной амплитуды (46) начнем со случая $\lambda = -1/2$. Используя приближение (64) и комплексную переменную

$$w \equiv \frac{a}{a(h-\imath)-1},$$

представим амплитуду f_λ рядом Лорана с центром в точке $(0,0)$:

$$f_\lambda(q) = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2}\frac{w}{1-gw}\left[1+O(q^6)\right] =$$
$$= \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2} w\left(1 - gw + g^2w^2 - \ldots\right)\left[1+O(q^6)\right]$$

Этот ряд имеет асимптотику

$$f_\lambda(q) = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2}\frac{a}{a(h-\imath)-1}\left[\sum_{n=0}^{2} F_n(h)\,q^{2n} + O(q^6/h)\right], \quad q \to 0, \tag{69}$$

где $F_0 = 1$, а F_1 и F_2 — дробно-рациональные функции аргумента $h(q)$:

$$F_1 = -a^2\,r_{\rm eff}\frac{1}{2(a(h-\imath)-1}, \quad F_2 = (a\,r_{\rm eff})^2\frac{a + 4r_{\rm eff}P\left[a(h-\imath)-1\right]}{4\left[a(h-\imath)-1\right]^2}.$$

В случае $\lambda \geqslant 1/2$ удобно использовать комплексную переменную

$$w \equiv q^{2\lambda+1}(\imath - h)\,\frac{a}{1+ag}.$$

Благодаря приближению (64) в этой переменной амплитуда f_λ представима в виде

$$f_\lambda(q) = -2\left(\frac{2\imath}{\pi}\right)^{1/2}\frac{a\,q^{2\lambda+1/2}}{1+ag}\frac{1}{1+w} =$$
$$= -\left(\frac{2\imath}{\pi}\right)^{1/2}\frac{aq^{2\lambda+1/2}}{1+ag}\left(1 - w + w^2 - w^3 + \ldots\right).$$

Из такого представления следует, что

$$
\begin{aligned}
& f_\lambda(q) = f_\lambda^{(2)}(q)\,(1+\varepsilon)\,, \\
& f_\lambda^{(2)}(q) \equiv -2\left(\frac{2\imath}{\pi}\right)^{1/2} a\,q^{2\lambda+1/2}\left[\sum_{n=0}^{2} F_n(h)\,q^{2n}\right], \quad q\to 0,
\end{aligned} \tag{70}
$$

где $F_0 = 1$, а F_1 и F_2 — комплексные полиномы переменной $h(q)$:

$$
\begin{aligned}
& F_1 = a\left[r_{\text{eff}}/2 + (h-\imath)\delta_{2\lambda,-1}\right], \\
& F_2 = a\left[r_{\text{eff}}^2(a/4 - r_{\text{eff}}P) + (h-\imath)\delta_{2\lambda,3}\right] + a^2\,(h-\imath)\,(r_{\text{eff}} + h - \imath)\,\delta_{2\lambda,-1},
\end{aligned}
$$

а величина ε оценивается по формулам (68).

Явную асимптотику парциального сечения $\sigma_\lambda(q)$ найдем самым простым способом: в его представлении (47) через амплитуду $f_\lambda(q)$ заменим эту амплитуду ее соответствующей асимптотикой (69) или (70). Приведем полученные асимптотики.

В случае $\lambda = -1/2$ сечение σ_λ имеет асимптотику

$$
\sigma_\lambda(q) = \frac{4a^2}{q[(ah-1)^2 + a^2]}\sum_{n=0}^{2} S_n(h)\,q^{2n} + O(q^6/h), \quad q\to 0, \tag{71}
$$

где $S_0 = 1$, а S_1 и S_2 — дробно-рациональные функции аргумента $h(q)$:

$$
S_1(h) = a\,r_{\text{eff}}\frac{1-ah}{(ah-1)^2 + a^2},
$$

$$
\begin{aligned}
S_2(h) = {} & \frac{a\,r_{\text{eff}}^2}{4\left[(ah-1)^2 + a^2\right]^2}\times \\
& \times\Big\{8r_{\text{eff}}P\left[a^3h(h^2-1) + 3ah(1-ah) - 1 - a^2\right] + \\
& \qquad + a\left[3(ah-1)^2 - a^2\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

В случае $\lambda \geqslant 1/2$ асимптотика сечения σ_λ такова:

$$
\sigma_\lambda(q) = \sigma_\lambda^{(2)}(q)(1+\varepsilon), \quad \sigma_\lambda^{(2)}(q) \equiv 8\,a^2 q^{4\lambda+1}\sum_{n=0}^{2} S_n(h)\,q^{2n}, \quad q\to 0, \tag{72}
$$

где $S_0 = 1$, а S_1 и S_2 – полиномы переменной $h(q)$:

$$
\begin{aligned}
& S_1(h) = a\left[r_{\text{eff}} + 2h\delta_{2\lambda,1}\right], \\
& S_2(h) = a\,r_{\text{eff}}^2\,(3a/4 - 2r_{\text{eff}}P) + a^2\left[3h\,\left(r_{\text{eff}} + h\right)\right]\delta_{2\lambda,1} + 2ah\delta_{2\lambda,3},
\end{aligned}
$$

а относительная ошибка ε приближения $\sigma_\lambda(q) \approx \sigma_\lambda^{(2)}(q)$ определена формулами (68).

Перечислим свойства асимптотик (66), (69) и (71), наиболее интересные с математической точки зрения. При любых целых n и p произведение $h^{-n}(q)\, q^p$ сходится к нулю в пределе $q \to 0$. Поэтому все слагаемые асимптотики (66), убывающие медленнее любой целой степени q^{2n}, являются слагаемыми ряда Тейлора старшего члена этой асимптотики:

$$\delta_{-1/2}(q) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{ah-1}\right) + O(h^{-2}q^2) = \\ = \frac{1}{h}\left[1 + \frac{1}{ah} + \frac{3-a^2}{(ah)^2} + O\left(\frac{1}{h^3}\right)\right], \quad q \to 0. \quad (73)$$

По той же причине все слагаемые асимптотики (69), убывающие медленнее любой целой степени q^{2n} являются слагаемыми следующего ряда Лорана

$$f_{-1/2}(q) = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2} \frac{a}{ah - 1 - a\imath}\left[1 + O\left(\frac{q^2}{h}\right)\right] = \\ = \left(\frac{2\imath}{\pi q}\right)^{1/2} \frac{1}{h}\left[1 + \frac{1+\imath a}{ah} + \left(\frac{1+\imath a}{ah}\right)^2 + \ldots\right]. \quad (74)$$

Аналогичным свойством обладают все слагаемыми разложения старшего члена асимптотики сечения (71), представленного в виде

$$\sigma_{-1/2}(q) = \frac{4a^2}{q[(ah-1)^2 + a^2]}\left[1 + O\left(\frac{q^2}{h}\right)\right] = \\ = \frac{4}{qh^2}\left[1 + \frac{2}{ah} + \frac{3-a^2}{(ah)^2} + O\left(\frac{1}{h^3}\right)\right]. \quad (75)$$

Если в представлениях (74) и (75) пренебречь постоянной величиной $|1/a|$ по сравнению с функцией $|h(q)|$, то получатся давно известные приближения (12). Следовательно, область применимости этих приближений ограничена условием $|ah(q)| \ll 1$. Используя определение (19) функции $h(q)$, представим это условие в виде

$$q \ll \min\left\{q_0, \quad 2\exp\left(-\frac{\pi}{2|a|} - \gamma\right)\right\}, \quad q_0 = 2\exp(-\gamma).$$

Обсудим физически интересные следствия асимптотик (66)–(71) и (73)–(75).

Согласно формуле (73) фаза $\delta_{-1/2}(q)$ имеет две низкоэнергетические особенности: наиболее медленно убывающее слагаемое ее асимптотики зависит только от длины рассеяния a и функции $h(q)$; при любом потенциале V старшим слагаемым этой же асимптотики является обратный логарифм $1/h(q) = (\pi/2)/ln(q/q_0)$.

Эти особенности указывают на исключительно сильное воздействие притягивающего центростремительного потенциала $-(1/4)\,x^{-2}$, которым в рассматриваемом случае $\lambda = -1/2$ становится слагаемое $\lambda(\lambda+1)\,x^{-2}$ уравнения Шредингера (5). Значение $-1/4$ константы такого центростремительного потенциала является критическим в следующем смысле: если ее увеличить на сколь угодно малое, но положительное число, то спектр оператора Шредингера обсуждаемого уравнения (5) станет неограниченным снизу и будет возможным падение частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ на силовой центр, которым является точка пересечения силовой прямой $\mathcal{L}$ и плоскости $\mathcal{P}$. Следствием такого критического значения и является столь заметная роль потенциала $-(1/4)\,x^{-2}$ в пределе $q \to 0$.

В силу первого из условий (1) сумма потенциалов $-(1/4)\,x^{-2}$ и $V(x)$ всегда является глубоким притягивающим потенциалом на некотором отрезке $0 \leqslant x \leqslant x_0$. В таком потенциале частица p_1 может иметь связанные и квазистационарные состояния, локализованные в области малых расстояний $r \leqslant d\,x_0$. Наличие аналогов таких двумерных состояний в системе двух легких ядер, каналируемых в кристалле, представляется правдоподобной и дополнительной к эффекту сверхфокусировки [8] причиной усиления экзотермической реакции слияния таких ядер.

Из соотношения (67) следует, что в пределе $q \to 0$ любая фаза $\delta_\lambda(q)$ с индексом $\lambda \geqslant 1/2$ сходится к нулю как произведение $-aq^{2\lambda+1}$ длины рассеяния a и четной степени $q^{2\lambda+1}$ волнового числа q. Следовательно, в этом пределе все фазы $\delta_\lambda(q)$, $\lambda \geqslant 1/2$, убывают быстрее фазы $\delta_{-1/2}(q)$. Физическая причина такой закономерности понятна: при любом $\lambda \geqslant 1/2$ потенциал $\lambda(\lambda+1)\,x^{-2}$ является отталкивающим барьером, экранирующим потенциал V.

Согласно формулам (69) и (70) амплитуда $f_{-1/2}$ в точке $q = 0$ имеет сингулярность типа $O(q^{-1/2})$, а остальные амплитуды f_λ, $\lambda \geqslant 1/2$, в этой точке обращаются в нуль как соответствующие степенные функции q^α с полуцелым показателем $\alpha = 2\lambda + 1/2$.

Вследствие равенств (71) и (75) сечение $\sigma_{-1/2}$ имеет две низкоэнергетические особенности: наиболее медленно убывающее слагаемое его асимптотики зависит только от длины рассеяния a и функции $h(q)$; при любом потенциале V старшим слагаемым этой же асимптотики является функция $4/(qh^2(q))$. Следовательно, сечение $\sigma_{-1/2}$ обладает следующим, не зависящим от выбора потенциала V свойством: в пределе $q \to 0$ оно неограниченно возрастает как функция $4/\left[q\ln^2(q/q_0)\right]$.

Из соотношения (72) следует, что в этом пределе все остальные парциальные сечения σ_λ, $\lambda \geqslant 1/2$, зависят от выбора потенциала V посредством параметров низкоэнергетического рассеяния a, r_{eff} и P и обращаются в нуль как произведение квадрата длины рассеяния a и соответствующей нечетной степени $8q^{4\lambda+1}$ волнового числа q.

Перейдем к выводу и анализу явных низкоэнергетических приближений функций N, U и u_λ, порожденных разбиениями (55) и оценками (56).

Начнем с исследования строения нормировочного множителя $N(q)$ как функции волнового числа q. В определении (44) заменим функции $c(x;q)$ и $s(x;q)$ их разбиениями (55), затем положим $x \to \infty$ и символами c_n и s_n обозначим предельные значения $c_n(\infty)$ и $s_n(\infty)$ компонент $c_n(x)$ и $s_n(x)$, $n \leqslant 2$.

В случае $\lambda = -1/2$ используем переменную

$$w \equiv \frac{1}{|h(q)|}\left[\frac{c(q)}{s(q)} + \frac{1}{h(q)}\left(1 + \frac{c^2(q)}{s^2(q)}\right)\right]$$

и запишем множитель $N(q)$ в виде

$$N(q) = \frac{1}{|h(q)\bar{s}(q)|}\frac{1}{\sqrt{1+w}} = \frac{1}{|h(q)\bar{s}(q)|}\left[1 - \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 - \frac{5}{16}w^3 + \ldots\right].$$

В пределе $q \to 0$ эта функция имеет следующую явную асимптотику

$$N(q) = \frac{1}{|c_0|}\left[(ah-1)^2 + a^2\right]^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{1} N_n(h)\, q^{2n} + O(q^4/h(q))\right], \qquad (76)$$

где $N_0 = 1$, а N_1 — дробно-рациональная функция аргумента $h(q)$:

$$N_1(h) = -\frac{(c_1 + hs_1)(ah-1) + as_1}{|c_0|\left[(ah-1)^2 + a^2\right]}.$$

В оставшемся случае, когда $\lambda \geqslant 1/2$, полагаем

$$w \equiv \frac{s(q)}{c(q)}\left\{2h(q) + \left[\,1 + h^2(q)\,\right]\frac{s(q)}{c(q)}\right\},$$

записываем нормировочный множитель в виде

$$N(q) = \frac{1}{|c(q)|}\frac{1}{\sqrt{1+w}} = \frac{1}{|c(q)|}\left[1 - \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 - \frac{5}{16}w^3 + \ldots\right],$$

а затем из этого представления получаем явную низкоэнергетическую асимптотику

$$N(q) = N^{(2)}(q)\,(1+\varepsilon)\,, \quad N^{(2)}(q) \equiv \left[(2\lambda-1)!!\,|c_0|\right]^{-1}\sum_{n=0}^{2} N_n(h)\, q^{2n}, \quad (77)$$

где $N_0 = 1$, N_1 и N_2 — полиномы аргумента $h(q)$:

$$N_1(h) = -\frac{1}{c_0}\left[c_1 + \frac{\pi}{4}s_0 h\delta_{2\lambda,1}\right],$$
$$N_2(h) = \frac{c_1^2}{c_0^2} - \frac{c_2}{c_0} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}h^2\right)\frac{s_0^2}{c_0^2} - \pi\frac{s_1}{c_0}h\right]\delta_{2\lambda,1} - \frac{\pi}{32}\frac{s_0}{c_0}h\delta_{2\lambda,3},$$

а функция ε является относительной точностью низкоэнергетического приближения $N(q) \approx N^{(2)}(q)$ и определена формулами (68).

Исследуем функцию U. В ее определении (36) заменим функции j_λ, n_λ и c, s соответствующими разбиениями (26)–(30) и (55). Приведя подобные слагаемые, выводим следующее асимптотическое в пределе $\rho \to 0$ представление:

$$U(x; q) = U^{(2)}(x; q) + O(\rho^{\lambda+7}),$$
$$U^{(2)}(x; q) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{\rho^{\lambda+1}}{2\lambda+1}\sum_{n=0}^{2} q^{2n}U_n(x). \qquad (78)$$

Каждая компонента U_n этого представления является конечной суммой

$$U_n(x) = \sum_{p+i=n} x^{2p}\left[a_p\, c_i(x) + x^{-2\lambda-1}\, d_p(x)\, s_i(x)\right]. \qquad (79)$$

Эта сумма содержит все четные степени аргумента x с показателями, не превышающими $2n$, коэффициенты a_p и функции $d_p(x)$, заданные формулами (17) и (25), а также функции c_i и s_i с номером $i \leqslant n$.

Строение компонент U_n зависит от соотношения между их номером n и числом $m = \lambda + 1/2$: компоненты U_n, $n \geqslant m$, содержат в качестве множителя функцию $y(x) \equiv \ln x$, а компоненты U_n, $n < m$, не содержат такого множителя. Для примера приведем явные выражения компонент (79), $n = 0, 1, 2$, в виде, наиболее удобном для их вычисления. С этой целью используем представления (17), (21) и (25) коэффициентов a_n, b_n и функций $d_n(x)$, а для краткости записи аргумент x функций $U_n(x)$, $c_n(x)$, $s_n(x)$ и $y(x)$ не указываем.

В случае $\lambda = -1/2$ компоненты U_n, $n = 0, 1, 2$, содержат логарифм y:

$$U_0 = c_0 - y\, s_0, \quad U_1 = c_1 - y s_1 - (x/2)^2\left[c_0 + (1-y)\, s_0\right],$$
$$U_2 = c_2 - y\, s_2 - (x/2)^2\left\{c_1 + (1-y)\, s_1 - (x/4)^2\left[c_0 + (3-2y)\, s_0\right]/2\right\}.$$

Начиная с $\lambda = 1/2$, компонента U_0 не содержит функции y и определяется как
$$U_0 = c_0 + x^{-2\lambda-1}s_0, \quad \lambda \geqslant 1/2.$$

При $\lambda = 1/2$ компоненты U_1 и U_2 задаются равенствами

$$U_1 = c_1 + x^{-2}\, s_1 - \left(x^2\, c_0 + 4y\, s_0\right)/8,$$
$$U_2 = c_2 + x^{-2}\, s_2 - \left(x^2\, c_1 + 4y\, s_1\right)/8 + (x^2/192)\left[x^2\, c_0 + 3(4y-5)\, s_0\right].$$

Начиная с $\lambda = 3/2$, компонента U_1 вычисляется по формуле

$$U_1 = c_1 + x^{-2\lambda-1} s_1 + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{c_0}{2\lambda+3} + x^{-2\lambda-1}\frac{s_0}{2\lambda-1}\right), \quad \lambda \geqslant 3/2.$$

В случае $\lambda = 3/2$

$$U_2 = c_2 + x^{-4}\, s_2 - (x^2/12)\left(c_1 - 3x^{-4}\, s_1\right) + \left(c_0 x^4 - 24 y s_0\right)/384.$$

В оставшемся случае $\lambda \geqslant 5/2$ компонента U_2 является следующей суммой:

$$U_2 = c_2 + x^{-2\lambda-1} s_2 + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{c_1}{2\lambda+3} + x^{-2\lambda-1}\frac{s_1}{2\lambda-1}\right) + \\ + \frac{x^4}{8}\left[\frac{c_0}{(2\lambda+3)(2\lambda+5)} + x^{-2\lambda-1}\frac{s_0}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)}\right].$$

По определению (36) радиальная компонента u_λ равна произведению NU. Заменив его сомножители соответствующими суммами (76)–(78), получим следующие низкоэнергетические приближения: в случае $\lambda = -1/2$

$$u_\lambda(x;q) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{|c_0|}\frac{\sqrt{\rho}}{\left[(ah-1)^2 + a^2\right]^{1/2}}\times \\ \times\left[\sum_{n=0,1} q^{2n}\, u_{\lambda,n} + O(\rho^4)\right], \quad \rho \to 0, \quad (80)$$

а в случае $\lambda \geqslant 1/2$

$$u_\lambda(x;q) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\rho^{\lambda+1}}{\tau\,|c_0|}\sum_{n=0}^{2} q^{2n}\, u_{\lambda n}(x;h) + O(\rho^{\lambda+7}), \quad \rho \to 0, \qquad (81)$$

где τ — коэффициент (23), а функции $u_{\lambda n}$ определены как

$$u_{\lambda n}(x;h) \equiv \sum_{p+i=n} N_p(h)\, U_i(x), \quad n = 0,1,2.$$

Теперь подставим компоненты (80) и (81) в разложение (4) волновой функции Ψ и положим $x = 0$. В результате получим приближение

$$\Psi(x=0,\varphi;q) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{|c_0|}\frac{\sqrt{q}}{\left[(ah-1)^2 + a^2\right]^{1/2}}\left[1 + O(q^4/h(q))\right], \quad q \to 0.$$

Это приближение позволяет оценить вероятность $2\pi\,|\Psi(0,0;q)|^2$, с которой медленная квантовая частица p_1 достигает рассеивающую ее силовую прямую $\mathcal{L}$.

Завершим настоящий раздел важными замечаниями. Аналоги цепочки систем (49) и представлений (60) и (62) получены в работе [6] на основе разложений (48), сходимость этих разложений была подтверждена вычислениями, выполненными авторами в частном случае, но в общем случае осталась недоказанной. Наши оценки (56) восполняют этот существенный недостаток. В той же работе [6] вместо нашего определения (19) функции $h(q)$ полагалось $h(q) \equiv \ln{(q/2)}$, что не позволяет получить асимптотики (12).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим и основные результаты настоящей работы. Линейная версия метода фазовых функций расширена на случай аксиально-симметричного короткодействующего потенциала. Для этого случая предложены физически понятные и математически обоснованные определения функции эффективного радиуса и параметров низкоэнергетического рассеяния: длины рассеяния, эффективного радиуса взаимодействия и параметра формы. Дан подробный вывод и качественный анализ неявных и явных низкоэнергетических приближений всех парциальных фаз, амплитуд, сечений и радиальных волновых функций рассеяния аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом. Для всех коэффициентов и координатных функций, содержащихся в таких приближениях, получены представления через компоненты решения рекуррентной цепочки линейных дифференциальных уравнений первого порядка, численный анализ которых не может вызвать каких-либо затруднений.

Автор признателен В. С. Мележику за интерес к настоящей работе и исключительно полезные обсуждения ее основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пупышев В. В.* Препринт ОИЯИ Р4-2012-101. Дубна, 2012. Направлено в ЯФ.
2. *Landau L. D., Lifchitz E. M.* Quantum Mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999.
3. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
4. *Де Альфаро В., Редже Т.* Потенциальное рассеяние: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
5. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
6. *Rakityansky S. A., Elander N.* // J. Phys. A. 2012. V. 45. P. 135209.
7. *Линхард Й.* // УФН. 1969. Т. 99. С. 249.
8. *Demkov Yu. N., Meyer J. D.* // Eur. Phys. J. B. 2004. V. 42. P. 361.

9. *Красовицкий П. М., Такибаев Н. Ж.* // Известия РАН, Сер. физ. 2006. Т. 70, № 5. С. 709.
10. *Melezhik V. S.* Multi-Channel Computations in Low-Dimensional Few-Body Physics. MMCP 2011, LNCS 7125, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. P. 94.
11. *Haller E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 153203.
12. *Petrov D. S., Holzman M., Shlyapnikov G. V.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2551.
13. *Petrov D. S., Shlyapnikov G. V.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 012706.
14. *Ticknor C.* // Phys. Rev. A. 2009. V. 80. P. 052702.
15. *Абарамовиц М., Стигун И.* Справочник по специальным функциям: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
16. *Калоджеро Ф.* Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
17. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с фр. М.: Изд-во иностр. лит., 1953, Т. 1.
18. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 1457.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. *Пупышев В. В.* Протон-водородная реакция в эффективно-двухчастичной модели. Препринт ОИЯИ Р4-2011-129. Дубна, 2011. Принято в ЯФ.
21. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений М.: Наука, 1983.

Получено 14 ноября 2012 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.12.2012.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,94. Уч.-изд. л. 2,28. Тираж 280 экз. Заказ № 57867.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/