Р4-2013-81

В. В. Пупышев *

ЭНЕРГИИ СЛАБОСВЯЗАННЫХ И ОКОЛОПОРОГОВЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. P4-2013-81
Энергии слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы в двумерной плоскости

Предполагается, что медленная квантовая частица движется в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и ее движение происходит в поле центрального короткодействующего потенциала. Показано, что приближенные энергии слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний этой частицы определяются корнями трансцендентных уравнений, содержащих два параметра: длину рассеяния и эффективный радиус. Найдены достаточные условия разрешимости таких уравнений. Исследована зависимость их решений от параметров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2013

Pupyshev V. V. P4-2013-81
Energies of Weakly-Bound and Near-Threshold Resonance States of a Quantum Particle in the Two-Dimensional Plane

By assumption, a slow quantum particle moves in the two-dimensional plane of the three-dimensional configuration space and its movement takes place in the field of a central short-range potential. It is shown that the approximated energies of the weakly-bound and near-threshold resonance states of this particle are defined via the roots of the transcendental equations containing two parameters: the scattering length and effective range. The sufficient conditions for solvability of those equations are found. The dependence of their solutions on the parameters is studied.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2013

ВВЕДЕНИЕ

К сожалению, в классических учебных курсах по квантовой механике [1, 2] и теории рассеяния в трехмерном координатном пространстве [3–5] не уделено особого внимания рассеянию в двумерной плоскости этого пространства. Фундаментальным вкладом в теорию двумерного рассеяния являются результаты до сих пор активно цитируемых журнальных статей [6–18], опубликованных в прошлом веке. В нашем веке расширение [19–26] этой теории стимулируется бурным развитием экспериментальной физики ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках [27–29]. Уровень современной экспериментальной физики настолько высок, что позволяет создавать магнитооптические ловушки, один из трех размеров которых сравним с длиной де Бройля частицы газа. Поэтому в таких ловушках движение частиц газа ограничено в одном направлении и происходит в основном в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства. Характерная плотность ультрахолодного газа настолько мала, что среди всех возможных столкновений его частиц доминируют бинарные.

С экспериментальной точки зрения наиболее интересны следующие известные особенности двумерного движения двух квантовых частиц, взаимодействующих посредством потенциала. При любом сколь угодно слабом, но притягивающем потенциале, убывающем быстрее кулоновского, в системе двух частиц имеется по крайней мере одно слабосвязанное состояние [1, 6, 7]. Сечение рассеяния двух частиц, взаимодействующих посредством короткодействующего, в том числе и финитного потенциала, неограниченно возрастает в пределе нулевой полной энергии [1, 9–12, 26] этих частиц, причем старшее слагаемое асимптотики сечения в этом пределе никак не зависит от потенциала и описывается неаналитической функцией полной энергии, равной ее логарифму. Эту же логарифмическую функцию полной энергии содержат и все известные к настоящему времени определения [13–16, 21, 25, 26] функции эффективного радиуса для двумерного рассеяния двух частиц в случае центрального короткодействующего потенциала. Наличие слабосвязанного состояния двух частиц существенно изменяет пороговое поведения сечения их рассеяния [17, 22, 23].

Слабосвязанные и долгоживущие околопороговые резонансные состояния двух частиц ультрахолодного газа в двумерной плоскости являются каналами рекомбинации и поэтому должны существенно менять интенсивно исследуемые свойства конденсата Бозе–Энштейна [8, 19, 20]. С точки зрения квантовой химии слабосвязанные или долгоживущие околопороговые резонансные состояния двух атомов или молекул в двумерной плоскости являются стабильными или долгоживущими молекулярными комплексами. Синтезом таких комплексов можно управлять, задавая взаимодействие между двумя частицами газа путем изменения параметров полей, создающих магнитооптическую ловушку [29].

Следовательно, актуальной задачей современной теории двумерного рассеяния и нового направления квантовой химии — двумерной молекулярной динамики — является математический анализ энергетических спектров слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний двух квантовых частиц.

Для вычисления энергий и волновых функций слабосвязанных состояний в случае нецентрального (анизотропного) потенциала, убывающего быстрее центробежного, наиболее перспективным является известный [18] и уже апробированный [24] метод.

Для расчета энергий околопороговых резонансных состояний в случае центрального короткодействующего потенциала, заданного аналитической функцией, наиболее экономичным представляется недавно предложенный алгоритм [25], основанный на комплексном скейлинге и рекуррентной цепочке энергонезависимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Как известно [30], вычисление малых по модулю собственных значений дифференциального оператора является довольно сложной проблемой, полное решение которой не представляется возможным без предварительного определения числа собственных значений и их распределения.

Основная цель настоящей работы — решить задачу локализации энергий слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы, движущейся в двумерной плоскости в поле центрального короткодействующего потенциала. Для решения используется аналитическое продолжение известного двумерного аналога [26] функции эффективного радиуса. Низкоэнергетическое разложение этого аналога аппроксимируется суммой его двух первых слагаемых. В результате получаются двухпараметрические эталонные трансцендентные уравнения. Параметрами являются длина рассеяния и эффективный радиус. Корни эталонных уравнений однозначно связаны с приближенными энергиями слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний. Таким образом исходная задача сводится к более простой, а именно к определению множества значений двух параметров, при которых эталонные уравнения имеют корни, и анализу зависимости корней от обоих параметров.

Разд. 1 содержит определения и известные соотношения, которые окажутся ключевыми в следующих разделах. Схематично изложенный выше подход реализуется в разд. 2 для локализации энергий слабосвязанных состояний, а в разд. 3 — для локализации энергий околопороговых резонансных состояний. Основные результаты выполненных исследований суммируются и обсуждаются в заключении.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Используем терминологию, принятую в учебных курсах [1–5] и в известных монографиях по функциональному анализу [31], теории дифференциальных уравнений [32, 33] и специальных функций [34, 35].

Пусть квантовая частица p_1 имеет конечную массу $m_1 > 0$ и движется только в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее трехмерного координатного пространства $\mathcal{R}^3$. Предполагается, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является силовым центром, воздействующим на частицу p_1 посредством потенциала $\tilde{V}$. Считается, что этот потенциал зависит только от расстояния r между частицей p_1 и точкой O, является короткодействующим и тождественно равным нулю вне плоскости $\mathcal{P}$.

В плоскости $\mathcal{P}$ введем двумерную декартову систему координат $\mathcal{S}^2$ с направляющими ортами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Пусть начальная точка этой системы совпадает с силовым центром O, а орт $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль волнового вектора $\mathbf{k}_0$ начального состояния частицы p_1. В системе $\mathcal{S}^2$ определим стандартным образом полярные координаты: расстояние r и азимутальный угол φ. Символом d обозначим свободный положительный параметр, имеющий размерность расстояния. Вместо расстояния r и волнового числа $k \equiv |\mathbf{k}_0|$ будем использовать безразмерные аргумент $x \equiv r/d$ и волновое число $q \equiv kd$. Формулами $E = (kd)^2\beta$, $E = \beta q^2$ и $\beta \equiv (\hbar/d)^2/(2m_1)$ этому числу сопоставим размерную полную энергию E частицы p_1.

Считаем, что безразмерный потенциал

$$V(x) \equiv (2m_1 d^2/\hbar^2)\tilde{V}(r = x/d)\,, \quad V(x) \equiv \tilde{V}(r = x/d)/\beta$$

является слабосингулярным, непрерывным и короткодействующим:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} x^2|V(x)| = 0, \quad V(x) \in \mathcal{C}^0(0,\infty), \\ &\lim_{x\to\infty} x^n|V(x)| = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Напомним, что волновая функция $\Psi(x, \varphi; q)$ частицы в плоскости $\mathcal{P}$ определяется как ограниченное в любой точке этой плоскости решение двумерного уравнения Шредингера [5]

$$\left[\partial_x^2 + x^{-1}\,\partial_x + x^{-2}\,\partial_\varphi^2 + q^2 - V(x)\right]\,\Psi(x, \varphi; q) = 0,$$

которое известной подстановкой [12, 25, 26]

$$\Psi(x,\varphi;q) = x^{-1/2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} u_\lambda(x;q)\, g_\lambda(\varphi),$$
$$g_\lambda(\varphi) \equiv (2\pi)^{-1/2} \exp\left[\, i(\lambda+1/2)\,\varphi\right]$$

и последующим проецированием на функции g_λ сводится к бесконечной по номеру $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$ совокупности не связанных друг с другом одномерных уравнений Шредингера для искомых радиальных компонент u_λ:

$$\left[\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda+1)\, x^{-2} - V(x)\right]\, u_\lambda(x;q) = 0, \quad x \geqslant 0. \tag{2}$$

Следовательно, волновое число q и полуцелое число $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$ образуют полный набор $\varepsilon = \{q, \lambda\}$ сохраняющихся квантовых чисел, определяющих квантовое состояние $|q, \lambda\rangle$ частицы p_1.

Вследствие первого из трех условий (1) при любом комплексном значении параметра q компонента u_λ вблизи начальной точки $x = 0$ должна иметь следующую асимптотику [32]:

$$u_\lambda(x;q) \sim (qx)^{\lambda+1}, \quad |q|x \to 0. \tag{3}$$

Для определения асимптотики этой компоненты u_λ в окрестности бесконечно удаленной точки $x = \infty$ необходимо сначала обсудить уравнение (2). Заметим следующее: если в этом уравнении и граничном условии (3) сделать замену $\lambda \to \ell$ и разрешить индексу ℓ принимать значения $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, то получится детально исследованная в теории рассеяния [4] одномерная задача [36] для радиальной компоненты u_ℓ волновой функции, определяющей движение квантовой частицы в трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ в случае сферически-симметричного потенциала $V(x)$. Поэтому представляется логичным определить все возможные состояния $|q, \lambda\rangle$ нашей частицы p_1 в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ этого пространства по аналогии с трехмерным случаем [4, 5]. Поступим именно таким образом.

Как и в монографии [5], считаем, что благодаря третьему из ограничений (1) на потенциал $V(x)$ волновая функция u_λ состояния упругого рассеяния $|q, \lambda\rangle$ определяется условиями $q \geqslant 0$ и

$$\langle x|q,\lambda\rangle = u_\lambda(x;q) \to \sin\left[qx - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)\right], \quad |q|x/|\lambda| \to \infty,$$

а величины $\delta_\lambda(q)$ и

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \frac{\sigma_\lambda^u(q)}{\left[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)\,\right]^2 + 1}, \quad \sigma_\lambda^u(q) \equiv \frac{4}{q}\,(2 - \delta_{2\lambda,-1}) \tag{4}$$

являются парциальными фазой и сечением рассеяния в таком состоянии. Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. При любом $q \geqslant 0$ сечение $\sigma_\lambda(q)$ не превышает своего унитарного предела $\sigma^u_\lambda(q)$. Предел $q \to 0+$ назовем пределом низких энергий. Нулевое значение энергии рассеяния $E = \beta q^2$ называем пороговым, потому что при переходе через него в область $E < 0$ состояния рассеяния исчезают.

Связанные состояния выделим из всех остальных условиями $q = ip$, $p \geqslant 0$, и

$$\langle x|ip, \lambda\rangle = u_\lambda(x; ip) \sim \exp(-px), \quad px/|\lambda| \to \infty; \quad \int\limits_0^\infty |u_\lambda(x)|^2\, dx = 1. \tag{5}$$

Вследствие этих условий в связанном состоянии $|ip, \lambda\rangle$ частица p_1 имеет отрицательную или нулевую полную энергию $E \equiv \beta q^2 = -\beta p^2$, которой соответствует неотрицательная энергия связи $B \equiv -E$ и квадратично-суммируемая на полуоси $x \geqslant 0$ радиальная волновая функция $\langle x|ip, \lambda\rangle = u_\lambda(x; ip)$, нормированная на единицу.

Резонансное состояние частицы p_1 определим как состояние $|q, \lambda\rangle$ с комплексным волновым числом $q = q_1 - iq_2$, $q_1, q_2 > 0$, которому отвечает радиальная волновая функция u_λ, обладающая асимптотикой в виде расходящейся круговой волны:

$$\langle x|q, \lambda\rangle = u_\lambda(x; q_1 - iq_2) \sim \\ \sim \exp\{q_2 x + i\,[q_1 x - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)]\}, \quad |q|x/|\lambda| \to \infty. \tag{6}$$

По определению число q лежит внутри четвертого квадранта комплексной плоскости волновых чисел. В этом квадранте удобно использовать специальные полярные координаты (p, ω) — модуль $p = |q|$ и угол ω, отсчитываемый от полуоси положительных вещественных значений и определенный следующими формулами:

$$q = p \exp[i(2\pi - \omega)] = p\, \exp(-i\omega), \quad \omega \equiv \operatorname{arctg}(q_2/q_1) \in (0, \pi/2). \tag{7}$$

В координатах (p, ω) размерная энергия E резонансного состояния $|q, \lambda\rangle = |(p, \omega), \lambda\rangle$ представляется как

$$\begin{gathered} E \equiv \beta q^2 = E_r - i\Gamma/2, \quad E_r \equiv \beta p^2, \\ \Gamma \equiv 2\beta p^2\, \sin 2\omega, \quad \beta \equiv (\hbar/d)^2/(2m_1), \end{gathered} \tag{8}$$

а величины E_r и Γ называются энергией резонанса и его шириной.

Сформулируем три особо значимых утверждения. Благодаря ограничениям (1), наложенным на потенциал $V(x)$, при любом $q > 0$ или $q = ip$,

$p > 0$, уравнение (2) с граничным условием (3) имеет общее решение $u_\lambda(x;q)$, обладающее асимптотикой

$$u_\lambda(x;q) \to N(q)\left[A^+(q)\exp(iqx) - A^- \exp(-iqx)\right], \quad |q|x/|\lambda| \to \infty. \tag{9}$$

В этой асимптотике

$$A^\pm(q) \equiv (2i)^{-1} \exp\{\mp i\,[\pi\lambda/2 - \delta_\lambda(q)]\},$$

а $N(q)$ и $\delta_\lambda(q)$ — произвольные и, вообще говоря, комплекснозначные функции аргумента q. Высказанное утверждение останется верным при любом $q = q_1 - iq_2$, $q_2 \in (0, q_0)$, $q_0 > 0$, если последнее из условий (1) заменить более сильным ограничением, а именно потребовать суммируемость функции $|V(x)|\exp(2q_0 x)$ в области $x \gg 1$.

Доказательство сформулированных выше утверждений о свойствах общего регулярного решения $u_\lambda(x;q)$ уравнения (2) с полуцелым значением параметра λ принципиально ничем не отличается от детально изложенного в монографии анализа этого уравнения в случае целых значений параметра $\lambda = \ell = 0, 1, \ldots$ и реализуется по той же схеме. Напомним ее. Сначала исходное уравнение (2) с условием (3) сводится к интегральному уравнению, функция Грина которого выражается через функции Бесселя $J_m(qx)$ и $Y_m(qx)$ целого порядка $m = \lambda + 1/2$. Далее используется известное аналитическое продолжение [34,35] таких функций и к полученному уравнению применяется метод последовательных приближений [31,32]. В итоге доказывается, что перечисленные выше ограничения на потенциал V являются достаточными для равномерной сходимости этого метода, а следовательно, для существования единственного решения u_λ с асимптотикой (9).

Перечислим наиболее часто употребляемые определения длины рассеяния для двумерного рассеяния короткодействующим потенциалом. В работах [13, 14] и [21] для случая $2\lambda = -1$ длиной рассеяния считался коэффициент a', содержащийся в старшем слагаемом $\ln(a'q/2)$ низкоэнергетической ($q \to +0$) асимптотики функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$. В том же случае $2\lambda = -1$ в работах [15,16] и [25] длина рассеяния определялась как низкоэнергетический предел функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - \ln(q/2)$.

Теперь поясним определения, введенные в работе [26], и доказанные в этой же работе соотношения, которые будут ключевыми для наших исследований.

Для каждого состояния рассеяния $|\lambda, q\rangle$, $q > 0$, с выбранным значением λ функция эффективного радиуса $K(q)$ определяется через функцию $K(x;q)$ формулами

$$K(q) \equiv \lim_{x\to\infty} K(x;q), \quad K(x;q) \equiv q^{2\lambda+1}\left[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(x;q) - h(q)\right]. \tag{10}$$

Функция $K(x;q)$ является бесконечным рядом по четным степеням волнового числа
$$K(x;q) = -\frac{1}{a(x)} + \frac{q^2}{2}\, r_{\text{eff}}(x) + \ldots, \quad x \geqslant 0. \tag{11}$$
Здесь и всюду далее $\delta_\lambda(x;q)$ — фазовая функция [5], а $h(q)$ — логарифмическая функция, содержащая константу Эйлера γ и определенная формулами
$$\begin{gathered} h(q) \equiv (2/\pi)\,[\ln{(q/2)} + \gamma] = (2/\pi)\,\ln{(q/q_0)}, \\ q_0 \equiv 2\exp{(-\gamma)} = 1{,}122918\ldots \end{gathered} \tag{12}$$
В начальной точке $x = 0$ полуоси $x \geqslant 0$ функции $a(x)$ и $\xi(x) \equiv a^2(x) r_{\text{eff}}(x)$ равны нулю, а в бесконечно удаленной точке $x = \infty$ могут быть неограниченными. Если предельные при $x \to \infty$ значения a и r_{eff} функций $a(x)$ и $r_{\text{eff}}(x)$ удовлетворяют ограничениям $a \neq 0$ и $|a|, |r_{\text{eff}}| < \infty$, то вследствие представлений (10) и (11) функция $K(q)$ имеет низкоэнергетическую ($q \to 0+$) асимптотику
$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1}\,[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2}\, r_{\text{eff}} + O(|q^4|/q_0^4), \tag{13}$$
а коэффициенты a и r_{eff} называются длиной рассеяния и эффективным радиусом. Именно такое определение, исключающее особые случаи $a = 0$, $|a| = \infty$ или $|r_{\text{eff}}| = \infty$, используется в настоящей работы. Анализ особых случаев $(a = 0, a = \pm\infty)$ выходит за ее рамки.

Сформулируем важное утверждение об аналитическом продолжении функции эффективного радиуса: определим функцию эффективного радиуса $K(q)$ в области $\mathcal{G} \equiv \{\, q : |\arg q| < \pi/2, \operatorname{Im} q \geqslant -q_0\}$ комплексной плоскости волнового числа q формулами (10), тогда в этой области останется в силе разложение (11), а функция $K(q)$ будет иметь асимптотику (13). Полное доказательство обоих следствий принятого определения опускаем по двум причинам: его схема основана на уравнениях для амплитудных функций $\tilde{c}(x;q)$, $s(x,q)$ и принципиально не отличается от схемы, использованной в работе [26] в случае $q = \operatorname{Re} q > 0$, а наиболее сложный этап — доказательство существования ограниченных пределов $c_0(x) \equiv \tilde{c}(x;q) - h(q)s(x;q)$ и $s_0(x) \equiv s(x,q)/q^{2\lambda+1}$ при $|q|/q_0 \to 0$ и вывод асимптотических оценок — реализуется способом, аналогичным подробно изложенному в работе [37].

При любых допустимых значениях числа λ, длины рассеяния $a \neq 0, \pm\infty$, эффективного радиуса $r_{\text{eff}} \neq \pm\infty$ и комплексного волнового числа q, $|q| \ll q_0$, $\arg q \leqslant \pi/2$, под приближением эффективного радиуса подразумеваем замену функции $K(q)$ суммой слагаемых $-1/a$ и $(q^2/2)\, r_{\text{eff}}$.

Слабосвязанными считаем связанные состояния $|ip, \lambda\rangle$, $0 < p \ll q_0$, а состояния $|q, \lambda\rangle$, $|q| \ll q_0$, называем околопороговыми состояниями упругого

$(q > 0)$ или резонансного $(q = q_1 - iq_2)$ рассеяния. Условием $q_2 \ll q_1$, равносильным условию $\omega \ll \pi/2$, из всех резонансных состояний выделяем особо интересные с физической точки зрения узкие резонансные состояния, ширина Γ которых мала и поэтому время жизни $\hbar/\Gamma$ велико.

2. ЭНЕРГИИ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

По определению (5) асимптотика радиальной волновой функции $u_\lambda(x;q)$ связанного состояния $|q,\lambda\rangle$ с волновым числом $q = ip$, $p > 0$, — убывающая экспонента. Покажем, что такое решение уравнения Шредингера (2) существует лишь при определенном значении p. Для этого поступим по аналогии с самым простым способом [2], известным в теории рассеяния в трехмерном координатном пространстве и основанном на использовании асимптотики (9) общего регулярного решения u_λ на полуоси мнимых значений волнового числа. Представим эту асимптотику при $|q|x/|\lambda| \to \infty$ и $q = ip$, $p > 0$, в виде

$$\begin{aligned} u_\lambda(x;ip) &\rightarrow N(q)\left[A^+(ip)\exp(-px) - A^-(ip)\exp(px)\right], \\ A^\pm(ip) &= (2i)^{-1}\exp\{\mp i\,[\pi\lambda/2 - \delta_\lambda(ip)]\}. \end{aligned}$$

Только в случае $A^-(ip) = 0$ такая асимптотика становится экспоненциально убывающей асимптотикой (5), а функция $u_\lambda(x;ip)$, обладающая ею, — квадратично-суммируемой на полуоси $x > 0$. Цепочкой следующих друг за другом соотношений

$$\begin{aligned} A^-(ip) = 0 \Rightarrow \exp[-i\delta_\lambda(ip)] = 0 \Rightarrow \cos\,\delta_\lambda(ip) - i\,\sin\,\delta_\lambda(ip) = \\ = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}\delta_\lambda(ip) = i \end{aligned}$$

получаем уравнение $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(ip) = i$, каждый положительный корень p которого является искомым значением мнимой части волнового числа $q = ip$ связанного состояния.

Сведем это уравнение к приближенному в пределе малых значений аргумента p уравнению, которое будет содержать в качестве параметров только длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff}. В интересующем нас частном случае $q = ip$, $p > 0$, из соотношения (13) следует асимптотическое представление

$$\begin{aligned} K(ip) = (ip)^{2\lambda+1}\,[\operatorname{ctg}\delta_\lambda(ip) - h(ip)] = \\ = -\frac{1}{a} - \frac{p^2}{2}\,r_{\text{eff}} + O(p^4/q_0^4), \quad p/q_0 \to 0+\,. \quad (14) \end{aligned}$$

Используя определение (12) функции $h(q)$, заменим в этой асимптотике функцию $h(ip)$ суммой $i + h(p)$, а функцию $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(ip)$ — ее нужным значением, равным i. В результате получим искомое асимптотическое уравнение

$$(ip)^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln{(p/q_0)} = \frac{1}{a} + \frac{p^2}{2}\,r_{\mathrm{eff}} + O(p^4/q_0^4), \quad p/q_0 \to 0+.$$

Согласно известным асимптотическим методам [33] приближенными корнями этого уравнения являются удовлетворяющие условию $p \ll q_0$ корни эталонного уравнения

$$(ip)^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln{(p/q_0)} = \frac{1}{a} + \frac{p^2}{2}\,r_{\mathrm{eff}}. \tag{15}$$

Наша следующая цель такова: считая величины a и r_{eff} независимыми и действительными параметрами, найти все явные ограничения на их значения, при которых эталонное уравнение (15) имеет корни на полуоси $p \geqslant 0$, а затем исследовать поведение таких корней во всех возможных предельных случаях.

Поставленную задачу решим самым наглядным, а именно графическим, способом. В двумерной плоскости введем декартову систему координат $\mathcal{S}_p^2$. По ее оси абсцисс будем откладывать значения аргумента p, а по оси ординат — значения функций $y_1(p)$ и $y_2(p)$, равных по определению левой и правой частям уравнения (15) при выбранном значении λ. В силу такого определения абсцисса точки касания или пересечения графиков функций $y_1(p)$ и $y_2(p)$ будет искомым корнем этого уравнения.

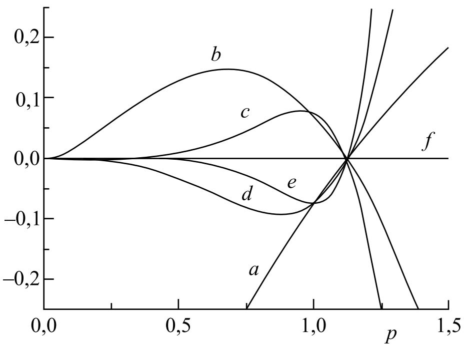

Рис. 1. Графики функций $y_0(p) \equiv 0$ (прямая f) и $y_1(p) = (ip)^{2\lambda+1}\,(2/\pi)\,\ln{(p/q_0)}$ в следующих случаях: $2\lambda = -1$ (кривая a); $2\lambda = 1,5$ (кривые b, c); $2\lambda = 3,7$ (кривые d, e)

Сначала перечислим особенности поведения функции $y_1(p)$. Используем рис. 1. При $2\lambda = -1$ функция $y_1(p) = (2/\pi)\ln{(p/q_0)}$ монотонно возрастает на всей полуоси $p > 0$. Если $2\lambda = 1, 5, \ldots$, то число $2\lambda+1$ не кратно четырем. Поэтому $i^{2\lambda+1} = -1$, а функция $y_1(p) = -(2/\pi)\,p^{2\lambda+1}\ln{(p/q_0)}$, равная нулю в точках $p = 0$ и $p = q_0$, на интервале $(0, q_0)$ принимает положительные значения и имеет один локальный максимум. Если $2\lambda = 3, 7, \ldots$, то число $2\lambda + 1$ кратно четырем. Следовательно, $i^{2\lambda+1} = 1$, функция $y_1(p) = (2/\pi)\,p^{2\lambda+1}\ln{(p/q_0)}$ обращается в нуль при $p = 0$ и $p = q_0$, а на интервале $(0, q_0)$ является отрицательной и имеет локальный минимум. Если $2\lambda \geqslant 3$, то график функции $y_1(p)$ имеет одну точку перегиба, абсцисса которой определяется как нуль второй производной $\partial_p^2 y_1(p)$ этой функции.

Теперь рассмотрим самый простой случай, когда $r_{\text{eff}} = 0$, а исследуемое уравнение (15) является однопараметрическим уравнением:

$$(ip)^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln(p/q_0) = \frac{1}{a}. \tag{16}$$

Пусть $2\lambda = -1$. Согласно рис. 2, *а* уравнение (16) всегда имеет один корень:

$$p_0 = p_0(a) = q_0 \exp\left(\frac{\pi}{2a}\right) = 2\exp\left(\frac{\pi}{2a} - \gamma\right). \tag{17}$$

При $a < 0$ корень p_0 лежит на отрезке $[0, q_0]$ и удовлетворяет условию $p_0 \ll 1$, если

$$a \ll -\frac{\pi}{2\,\ln\,q_0} = \frac{\pi}{2(\gamma - \ln 2)} = -13{,}549346\ldots \tag{18}$$

В случае $a > 0$ корень p_0 превышает число q_0 и сходится к нему в пределе $a \to 0+$.

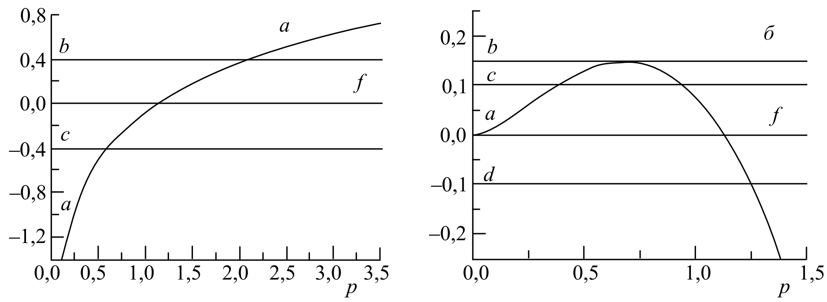

Рис. 2. Графики функций $y_0(p) \equiv 0$ (прямая f), $y_1(p) = (ip)^{2\lambda+1}\,(2/\pi)\,\ln(p/q_0)$ (кривые a) и $y_2(p) = 1/a$ в следующих случаях: *а*) $2\lambda = -1$, $a = 2{,}25$ (прямая b), $a = -2{,}25$ (прямая c); *б*) $2\lambda = 1$, $a = \bar{a} = \pi e q_0^{-2} \approx 6{,}772$ (прямая b), $a = 10$ (прямая c) и $a = -10$ (прямая d)

Пусть теперь число $2\lambda + 1$ не кратно четырем. Согласно рис. 2, *б* кривая $y_1(p)$ и прямая $y_2(p) \equiv 1/a$ могут касаться и пересекаться. В точке касания друг другу равны и функции y_1, y_2, и их производные $\partial_p y_1$ и $\partial_p y_2 \equiv 0$. Производная

$$\partial_p y_1(p) = -(2/\pi)\,p^{2\lambda}\,[(2\lambda+1)\,\ln(p/q_0) + 1] \tag{19}$$

обращается нуль в точке $p = t$, зависящей от λ как функция

$$t = t(\lambda) = q_0\,\exp[-1/(2\lambda+1)] < q_0. \tag{20}$$

В этой точке функция $y_1(p)$ достигает своего максимального значения $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \frac{2}{\pi e}\,\frac{q_0^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \leqslant \frac{q_0^{2\lambda+1}}{\pi e}, \quad e \equiv \exp(+1) = 2{,}718281\ldots \tag{21}$$

Если функция $y_2(p) \equiv 1/a$ равна этому значению, то $a = \bar{a}$, где

$$\bar{a} \equiv \frac{1}{y_1(t)} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \pi\, e\, q_0^{-2\lambda-1} = \frac{\pi(2\lambda+1)}{4^{\lambda+1}} \exp\left[1 + (2\lambda+1)\gamma\right]. \quad (22)$$

В этом случае кривая y_1 касается прямой y_2 в точке $p = t$, а уравнение (16) имеет один корень второго порядка, равный t. Если $0 < a < \bar{a}$, то $y_1(p) > y_2(p) > 1/a$ при любом $p > 0$ и корней нет. Если же $a > \bar{a}$, то кривая y_1 и прямая y_2 пересекаются в двух точках, а уравнение (16) имеет два разных корня p_- и p_+ первого порядка: корень p_- лежит слева от точки t, а корень p_+ — справа. В пределе $a/\bar{a} \to \infty$ корень p_- сходится к нулю, а корень p_+ — к точке q_0. Поэтому корень p_- подчиняется условию $p_- \ll 1$, если $a \gg \bar{a}$, а корень p_+ не может быть меньше минимального значения $q_0 \exp(-1/2) = 0{,}681084\ldots$ переменной $t(\lambda)$, которое достигается при $\lambda = 1/2$. В оставшемся случае ($a < 0$) графики функций y_1 и y_2 всегда пересекаются, но абсцисса p их точки пересечения превышает число q_0 и сходится к нему в пределе $a \to 0-$.

Теперь предположим, что число $2\lambda + 1$ кратно четырем. Изменим знак в обеих частях уравнения (15) на противоположный. Заметим, что полученное уравнение $y_1(p) = -1/a$ отличается от исследованного выше уравнения $y_1(p) = 1/a$ лишь знаком правой части и допустимыми значениями числа λ. Поэтому в рассматриваемом случае можно применить формулы (19)–(22) и прийти к следующим выводам. Уравнение (15) при $a < -\bar{a}$ не имеет корней; если $a = -\bar{a}$, то имеется один кратный корень, равный t; если $0 > a > -\bar{a}$, то имеются два разных корня p_- и p_+: корень p_- лежит слева от точки t, а корень p_+ — справа. В пределе $a/\bar{a} \to -\infty$ корень p_- сходится к нулю, а корень p_+ — к числу q_0. Корень p_- подчиняется условию $p_- \ll 1$, если $a \ll -\bar{a}$; корень p_+ не может быть меньше минимального значения $q_0 \exp(-1/4) = 0{,}874530\ldots$ переменной $t(\lambda)$, которое достигается при $\lambda = 3/2$. Если $a > 0$, то имеется один корень p, причем такой, что $p > q_0$ и $p \to q_0$ при $a \to 0+$.

Перейдем к анализу уравнения (15) в случае $r_{\text{eff}} \neq 0$, когда его правая часть $y_2(p) = 1/a + q^2 r_{\text{eff}}/2$ является квадратной параболой. Сначала при любом λ найдем связи между параметрами a, r_{eff} и абсциссой t точки касания кривых y_1 и y_2. Из равенства $\partial_p y_1(p) = \partial_p y_2(p)$ в точке $p = t$ получаем связь между r_{eff} и t:

$$r_{\text{eff}} = (i)^{2\lambda+1}\, t^{2\lambda-1}\, (2/\pi) \left[(2\lambda+1) \ln(t/q_0) + 1\right]. \quad (23)$$

Используя эту связь и равенство $y_1(p) = y_2(p)$, $p = t$, находим связь между a и t:

$$a^{-1} = -(i)^{2\lambda+1}\, t^{2\lambda+1}\, (1/\pi) \left[(2\lambda-1) \ln(t/q_0) + 1\right]. \quad (24)$$

Поделим равенство (24) на равенство (23). В итоге получим соотношение

$$\frac{t^2}{2}\,\frac{(2\lambda-1)\ln(t/q_0)+1}{(2\lambda+1)\ln(t/q_0)+1} = -\frac{1}{a r_{\text{eff}}}, \tag{25}$$

определяющее корень t уравнения (15) через произведение его параметров a и r_{eff}.

При заданных значениях λ, a и r_{eff} равенства (23)–(25) становятся уравнениями, позволяющими получить следующую информацию: определить положение абсциссы t точки касания или же показать, что такой точки нет. Если $2\lambda = \pm 1$, то, используя такую информацию, нетрудно найти явные ограничения на параметры a и r_{eff}, при которых уравнение (15) имеет решение. Докажем это утверждение.

Пусть $2\lambda = -1$. Исследуем корни уравнения (15), используя рис. 3.

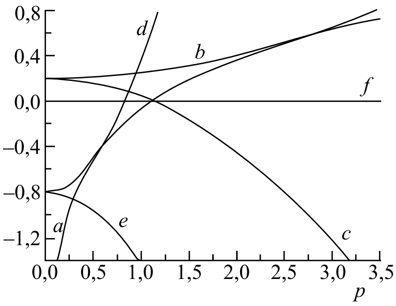

Рис. 3. Графики функций $y_0(p) \equiv 0$ (прямая f), $y_1(p) = (2/\pi)\ln(p/q_0)$ (кривая a) и $y_2(p) = 1/a + p^2 r_{\text{eff}}/2$ в следующих случаях: $a = 5$, $r_{\text{eff}} = \tilde{r}_{\text{eff}}(a) \approx 0{,}099$ (кривая b); $a = 5$, $r_{\text{eff}} = -2/(aq_0^2) \approx -0{,}317$ (кривая c); $a = -1{,}25$, $r_{\text{eff}} = \tilde{r}_{\text{eff}}(a) \approx 2{,}293$ (кривая d); $a = -1{,}25$, $r_{\text{eff}} = -1/(aq^2) \approx -0{,}158$ (кривая e); $\tilde{r}_{\text{eff}}(a)$ — функция (27)

Рассмотрим случай $a > 0$, $r_{\text{eff}} > 0$. В этом случае при любом $p \geqslant 0$ парабола $y_2(p)$ является вогнутой кривой ($\partial_p^2 y_2 > 0$) и лежит в первом квадранте системы $\mathcal{S}_p^2$; этому же квадранту принадлежит выпуклая ($\partial_p^2 y_1 < 0$) кривая $y_1(p)$, если $p > q_0$. Разрешив уравнение (24) относительно t, получаем равенство

$$t = t(a) = q_0 \exp\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

Используя его, заключаем, что если точка касания существует, то ее абсцисса t лежит правее точки q_0, а затем из равенства (23) получаем значение $\tilde{r}_{\text{eff}}$ параметра r_{eff}, при котором такая точка имеется:

$$r_{\text{eff}} = \tilde{r}_{\text{eff}}(a) \equiv \frac{2}{\pi q_0^2}\,\exp\left(-\frac{\pi}{a} - 1\right). \tag{27}$$

Этому случаю на рис. 3 соответствует парабола b, касающаяся графика функции y_1, которым является кривая a. Так как y_1 и y_2 — вогнутая и выпуклая кривые, то при условии $r_{\text{eff}} > \tilde{r}_{\text{eff}}$ уравнение (15) не имеет корней, а в случае $0 < r_{\text{eff}} < \tilde{r}_{\text{eff}}$ имеются два корня, но их значения превышают число q_0.

Теперь исследуем случай $a > 0$, но $r_{\text{eff}} < 0$. При любом отрицательном значении r_{eff} уравнение (23), определяющее абсциссу t точки касания кривых $y_1(p)$ и $y_2(p)$, порождает неравенство $t^2 < 0$. Следовательно, кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ не касаются. Так как обе эти кривые выпуклые, то они имеют одну точку пересечения. Точка $(q_0, 0)$, через которую на рис. 3 проходит парабола b, является таковой, если

$$r_{\text{eff}} = r^0_{\text{eff}}(a) \equiv -2/(aq_0^2). \tag{28}$$

Следовательно, если $r_{\text{eff}} \leqslant r^0_{\text{eff}}$, то абсцисса p точки пересечения принадлежит полуинтервалу $(0, q_0]$ и сходится к нулю при $r_{\text{eff}} \to \infty$, а в противном случае удовлетворяет неравенству $p > q_0$.

Следующий случай ($a < 0$, $r_{\text{eff}} < 0$) самый простой: по той же причине, что и в предыдущем случае, кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ не могут касаться, но всегда пересекаются в одной точке. Соответствующий ей корень уравнения (15) принадлежит интервалу $(0, p_0)$, где p_0 — функция (17). Этот корень сходится к нулю в трех случаях: $a \to 0-$ или $r_{\text{eff}} \to -\infty$, или же при $a \to 0-$ и $r_{\text{eff}} \to -\infty$. Рассмотренному случаю на рис. 4 отвечает точка пересечения кривых a и e.

Оставшийся случай ($a < 0$, $r_{\text{eff}} > 0$) самый сложный, потому что согласно уравнению (24) возможны два варианта: абсцисса t точки касания кривых $y_1(p)$ и $y_2(p)$ принадлежит полуинтервалу $(p_0, q_0]$, если $a \geqslant -\pi$, или расположена на полуинтервале $(q_0, q_0 e]$, если $a < -\pi$. Первому варианту на рис. 3 соответствует точка касания кривых a и d. Разрешив уравнение (23) относительно t, получаем $t = \sqrt{2/(\pi r_{\text{eff}})}$. Заменив t правой частью этого равенства в уравнении (24), доказываем, что при данном a точка касания существует, если $r_{\text{eff}} = \tilde{r}_{\text{eff}}(a)$, где $\tilde{r}_{\text{eff}}(a)$ — функция (27). Если $r_{\text{eff}} < \tilde{r}_{\text{eff}}(a)$, то кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ пересекаются в двух точках, а соответствующие им корни p_- и p_+ уравнения (15) не совпадают ($p_- < p_+$) и распределены следующим образом. При условиях $a \geqslant -\pi$ и $r_{\text{eff}} \geqslant r^0_{\text{eff}}(a)$, где $r^0_{\text{eff}}(a)$ — функция (28), оба корня принадлежат полуинтервалу $(p_0, q_0]$. При условиях $a \geqslant -\pi$ и $r_{\text{eff}} < r^0_{\text{eff}}(a)$, корень p_- остается на этом интервале, а корень p_+ превышает число q_0. Если $a < \pi$ и $r_{\text{eff}} \geqslant r^0_{\text{eff}}(a)$, то корни p_- и p_+ лежат на полуоси $q_0 \geqslant 0$. В случае $a < -\pi$, $r_{\text{eff}} < r^0_{\text{eff}}(a)$ корень p_- принадлежит интервалу (p_0, q_0), а корень p_+ остается на той же полуоси. При любом $a < 0$ корень p_- сходится к p_0 в пределе $r_{\text{eff}} \to 0+$.

Теперь положим $2\lambda = 1$ и исследуем уравнение (15), используя рис. 4.

Начнем со случая $a > 0$, $r_{\text{eff}} > 0$. Заметим, что обе кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ лежат в первом квадранте системы $\mathcal{S}^2$, если $p \leqslant q_0$. Согласно формуле (21) функция $y_1(p)$ ограничена сверху числом $q_0^2/(\pi e)$. Значит, исследуемые кривые могут касаться или же пересекаться в двух точках, если выполняется

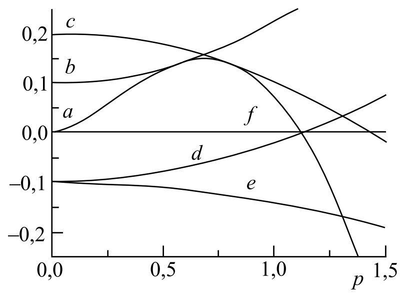

Рис. 4. Графики функций $y_0(p) \equiv 0$ (прямая f), $y_1(p) = -(2/\pi)\, p^2 \ln{(p/q_0)}$ (кривая a) и $y_2(p) = 1/a + p^2 r_{\rm eff}/2$ в следующих случаях: $a = 10$, $r_{\rm eff} = \bar r_{\rm eff}(a) \approx 0{,}248$ (кривая b); $a = 5$, $r_{\rm eff} = \bar r_{\rm eff}(a) \approx -0{,}193$ (кривая c); $a = -10$, $r_{\rm eff} = -2/(aq_0^2) \approx 0{,}159$ (кривая d); $a = -10$, $r_{\rm eff} = -1/(aq_0^2) \approx -0{,}076$ (кривая e); $\bar r_{\rm eff}(a)$ — функция (30)

неравенство $y_2(p) \leqslant y_1(p)$, которое порождает условие

$$a > \bar a \equiv \pi e\, q_0^{-2} = 6{,}772476\ldots \tag{29}$$

При таком условии в силу равенства (24) точка касания имеет абсциссу $t = \sqrt{\pi/a}$, меньшую числа $t_0 = q_0 \exp{(-1/2)}$. Положив $t = \sqrt{\pi/a}$ в формуле (23), находим значение $\bar r_{\rm eff}$ параметра $r_{\rm eff}$, при котором имеется точка касания:

$$r_{\rm eff} = \bar r_{\rm eff}(a) = -\frac{2}{\pi}\, \ln\left(\frac{\pi e}{aq_0^2}\right) = \frac{2}{\pi}\, \ln\left(\frac{a}{\bar a}\right). \tag{30}$$

Этой точке на рис. 4 соответствует точка касания кривых a и b. Если $a > \bar a$ и $r_{\rm eff} < \bar r_{\rm eff}(a)$, то кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ пересекаются в двух точках, абсциссы которых p_- и p_+ подчиняются неравенствам $p_- < t < p_+$ и являются корнями уравнения (15). При условиях $a/\bar a \to \infty$ и $r_{\rm eff} < \bar r_{\rm eff}(a)$ корень p_- сходится к нулю справа.

Пусть теперь $a > 0$, $r_{\rm eff} < 0$. Согласно равенствам (23) и (24) кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$, обозначенные на рис. 4 буквами a и c, касаются в точке с абсциссой $t = \sqrt{\pi/a}$, если $a < \bar a$ и $r_{\rm eff} = \bar r_{\rm eff}(a)$. При условиях $a < \bar a$ и $r_{\rm eff} < \bar r_{\rm eff}(a)$ кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ пересекаются в двух точках. Их абсциссы p_- и p_+ являются корнями уравнения (15) и подчиняются следующим соотношениям: $p_0 \in (0, t_0)$; $p_+ \in (t_0, q_0]$, если $r_{\rm eff} \geqslant r^0_{\rm eff}(a)$, и $p_+ > q_0$, если $r_{\rm eff} \leqslant r^0_{\rm eff}(a)$. В этих соотношениях $t_0 = q_0 \exp{(-1/2)}$, а $r^0_{\rm eff}(a)$ — функция (28). Корень p_- сходится к нулю при $r_{\rm eff} \to -\infty$.

Следующий случай: $a < 0$, $r_{\rm eff} > 0$. Функция $y_2(p)$ обращается в нуль при $p = q_0$, если выполняется условие (28). Кривая d на рис. 4 — график такой функции. Так как $a < 0$, то уравнение (24) имеет только комплексное решение $t = i\,\sqrt{\pi/|a|}$. Поэтому кривые $y_1(p)$ и $y_2(p)$ не могут касаться, но пересекаются в одной точке. Ее абсцисса p такова, что $p \leqslant q_0$, если $r_{\rm eff} \geqslant r^0_{\rm eff}(a)$, и $p > q_0$, если $r_{\rm eff} < r^0_{\rm eff}(a)$.

В последнем случае ($a < 0$, $r_{\rm eff} < 0$) кривые y_1 и y_2 пересекаются в одной точке. Ее абсцисса больше числа q_0. Такие кривые на рис. 4 помечены буквами a и e.

Завершим настоящий раздел полезными замечаниями и примерами.

В случае $2\lambda \geqslant 3$ каждое из трех уравнений (23)–(25), определяющих абсциссу t точки касания, содержат логарифмическую функцию. Поэтому в отличие от рассмотренных выше случаев $2\lambda = \pm 1$ решения этих уравнений и условия на значения a и r_{eff}, при которых точка касания существует, нельзя найти в явном виде. Это обстоятельство сужает качественный анализ уравнения (15) до доказательства с помощью рис. 1 следующего утверждения. В случае $2\lambda \geqslant 3$ уравнение (15) имеет одно решение $p < q_0$, если $a > 0$ и $r_{\text{eff}} < r^0_{\text{eff}}(a)$ или $a < 0$, но $r_{\text{eff}} > r^0_{\text{eff}}(a)$, где $r^0_{\text{eff}}(a)$ — функция (28). При известных значениях $\lambda \geqslant 3/2$, a и r_{eff} численный анализ уравнения (15) несложен. Такой анализ следует начать с локализации искомых корней. Для этого нужно сначала вычислить абсциссу t точки касания как корень уравнения (24). Затем в равенстве (25) заменить величину t ее найденным значением и вычислить его правую часть. Ее значение будет значением эффективного радиуса $\bar{r}_{\text{eff}}(a)$, при котором кривые y_1 и y_2 касаются. Дальнейшее исследование заключается в дословном повторении данного выше анализа случая $2\lambda = 1$ и приводит к следующим выводам. При наперед заданных значениях $\lambda \geqslant 3/2$, a и r_{eff} уравнение (15) имеет корни в следующих случаях: если $2\lambda + 1$ не кратно четырем, то при любом $a > 0$ и $r_{\text{eff}} < \bar{r}_{\text{eff}}(a)$ или при $a \leqslant 0$ и любом r_{eff}; если $2\lambda + 1$ кратно четырем, то при любом $a < 0$ и $r_{\text{eff}} > \bar{r}_{\text{eff}}(a)$ или при $a \geqslant 0$ и любом r_{eff}. При $2\lambda \geqslant 3$ кривая $y_1(p)$ имеет одну точку перегиба, абсцисса p' принадлежит полуинтервалу $(0, t(\lambda))$, где число $t(\lambda)$ вычисляется по формуле (20). Из-за такой точки перегиба уравнение (15) может иметь два корня (кратный p_1 и простой p_3) или три простых корня (p_1, p_2 и p_3) в следующих случаях: $2\lambda + 1$ не кратно четырем, $a < 0$, $r_{\text{eff}} > 0$ или $2\lambda + 1$ кратно четырем, но $a > 0$, $r_{\text{eff}} < 0$. Корни p_1 и p_2 принадлежат полуинтервалу $(0, t(\lambda))$, а корень p_3 удовлетворяет соотношениям $t(\lambda) < p_3 < q_0$.

Найденные в случае $r_{\text{eff}} = 0$ точные решения (17) и (20) уравнения (15) и условия его разрешимости (18) и (22) становятся соответствующими приближенными соотношениями при отличном от нуля, но достаточно малом по модулю значении r_{eff}, а именно при условии $q_0^2|ar_{\text{eff}}| \ll 2$, позволяющем на отрезке $0 \leqslant p \leqslant q_0$ считать второе слагаемое асимптотики (14) малой поправкой к ее первому слагаемому.

Предположим, что волновое число ip слабосвязаного состояния $|ip, \lambda\rangle$ задано теоретически или измерено экспериментально. Тогда, положив $t = p$ в соотношениях (23) и (24), несложно сначала вычислить значения параметров a и r_{eff}, при которых такое состояние имеется, а затем использовать эти значения и приближение (13) для экстраполяции фазы $\delta_\lambda(q)$ и соответствующего сечения $\sigma_\lambda(q)$, заданного формулой (4), в область $q \in [0, q_0)$.

Сформулируем особо важный с физической точки зрения вывод, следующий из выполненного выше анализа уравнения (15). Энергия связанного состояния квантовой частицы сходится к нулю в следующих случаях: если $2\lambda = -1$, то в пределе $a \to 0-$ или при условиях $a \neq 0$ и $r_{\text{eff}} \to -\infty$; если $2\lambda = 1, 5, \ldots$, то в пределе $a \to \infty$ или при условиях $a > 0$ и $r_{\text{eff}} \to -\infty$; если $2\lambda = 3, 7, \ldots$, то в пределе $a \to -\infty$ или при условиях $a < 0$ и $r_{\text{eff}} \to \infty$.

Приведем два физически интересных примера.

Пусть $2\lambda = -1$, а $r_{\text{eff}} = 0$, тогда корню (17) уравнения (15) при условии (18) отвечает связанное состояние с энергией связи

$$B = \beta p_0^2 = \beta q_0^2 \exp\left(\pi/a\right), \quad a \leqslant -\pi/(2\ln q_0), \tag{31}$$

которая экспоненциально сходится к нулю в пределе $a \to 0-$.

Пусть $2\lambda = 1, 5, \ldots$, а $r_{\text{eff}} = 0$. Используя равенства (20) и (22), заключаем, что первому корню p_- уравнения (15), сходящемуся к нулю в пределе $a \to \infty$, соответствует связанное состояние, энергия связи которого ограничена сверху:

$$B = \beta p_-^2 \leqslant \beta q_0^2 \exp\left(-\frac{2}{2\lambda+1}\right), \quad a \geqslant \bar{a} \equiv \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \pi\, e\, q_0^{-2\lambda-1}, \tag{32}$$

и сходится к нулю в двух пределах $a/\bar{a} \to \infty$ и $\lambda \to \infty$. Стоит отметить интересный факт: определение величины $\bar{a}$ содержит три фундаментальные константы: число π, основание e натурального логарифма и константу Эйлера γ.

Сравним наше представление (31) энергии связи B через длину рассеяния a с известными интегральными представлениями этой же энергии, но через потенциал $V(x)$. Введем положительную константу связи g и будем считать, что $V(x) = g\bar{V}(x)$. Используя определения, принятые в настоящей работе, сформулируем альтернативу, впервые доказанную Б. Симоном в его работе [6]: при любой сколь угодно малой константе g квантовая частица не имеет связанного состояния $|ip, \lambda\rangle$, $2\lambda = -1$, если

$$I \equiv (\pi/2) \int\limits_0^\infty dx\, x\, \bar{V}(x) > 0,$$

и имеет таковое в противном случае, когда $I < 0$, причем в этом случае энергия связи $B(g)$ обладает асимптотикой

$$B(g) = \beta q_0^2 \exp\left[\pi/S(g)\right] \left[1 + \mathrm{o}(1)\right], \quad g \to 0+, \quad S(g) \equiv g\, I.$$

В работе [7] С. Х. Патил дал иное доказательство альтернативы Симона и получил для функции $S(g)$ представление в виде бесконечного ряда по целым степеням параметра g с первым слагаемым gI. Авторы работы [15] показали, что произведение gI равно борновскому приближению a_B длины рассеяния a.

Выведем это приближение другим способом. В рассматриваемом случае $2\lambda = -1$ функция $a(x)$, содержащаяся в разложении (11), определяется равенством $a(x) = -(\pi/2)s_0(x)/c_0(x)$, а компоненты $c_0(x)$ и $s_0(x)$ удовлетворяют системе уравнений [26]

$$\begin{aligned} \partial_x c_0(x) &= -\ln(x)\, y(x), \quad \partial_x s_0(x) = -y(x), \\ y(x) &\equiv xV(x)\left[c_0(x) - \ln(x)\, s_0(x)\right], \quad x > 0, \end{aligned} \tag{33}$$

и граничным условиям $c_0(0) = 1$, $s_0(0) = 0$. Продифференцируем это равенство по аргументу x, а затем заменим производные $\partial_x c$ и $\partial_x s$ правыми частями соответствующих уравнений (33). В результате получим нелинейную задачу

$$\tau\, \partial_x a(x) = xV(x)\left[1 + \tau a(x)\, \ln(x)\right]^2, \quad x > 0; \quad a(0) = 0; \quad \tau = 2/\pi.$$

Ее первая итерация в точке $x = \infty$ совпадает с борновским приближением a_B. Сравнив наше представление (31) с асимптотикой функции $B(g)$, заключаем, что эта длина рассеяния a равна сумме $S(g)$ бесконечного ряда Патила.

3. ЭНЕРГИИ ОКОЛОПОРОГОВЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ

Выведем уравнение, определяющее волновое число q резонансного состояния квантовой частицы. Положив $q = q_1 - iq_2$ $(q_1, q_2 > 0)$ в асимптотике (9) общего регулярного решения уравнения Шредингера, получим асимптотику в виде разности

$$\begin{aligned} u_\lambda(x;q) \to N(q)\Big[&A^+(q)\exp(iq_1 + q_2 x) - \\ &- A^-(q)\exp(-iq_1 - q_2 x)\Big], \quad |q|x/|\lambda| \to \infty, \end{aligned}$$

где $A^\pm(q)$ — следующие комплексные функции волнового числа:

$$A^\pm(q) \equiv (2i)^{-1}\, \exp\left\{\mp i\, \left[\pi\lambda/2 - \delta_\lambda(q_1 - iq_2)\right]\right\}.$$

Эта разность совпадает с асимптотикой (6) волновой функции резонансного состояния тогда и только тогда, когда $A(q_1 - iq_2) = 0$, что возможно только при условии $\exp(-i\delta_\lambda(q)) = 0$. Из этого условия следует искомое уравнение $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q_1 - iq_2) = i$. Для околопороговых резонансных состояний $|(p,\omega),\lambda\rangle$, $p \ll q_0$, благодаря представлениям (7) и соотношениям (12), (13) этому уравнению отвечает комплексное эталонное уравнение

$$\begin{aligned} p^{2\lambda+1}\, \left[i\left(1 + \frac{2}{\pi}\omega\right) - h(p)\right] + \left[\frac{1}{a} - \frac{p^2}{2}\, r_{\text{eff}}\, \exp(-2i\,\omega)\right] \times \\ \times \exp\left[-i(2\lambda+1)\,\omega\right] = 0, \end{aligned}$$

которое порождает систему двух вещественных уравнений

$$p^{2\lambda+1}\,(2/\pi)\,\ln(p/q_0) = (1/a)\,\cos[(2\lambda+1)\omega] - (p^2/2)\,r_{\text{eff}}\,\cos[(2\lambda-1)\omega], \quad (34)$$

$$p^{2\lambda+1}\,[1+(2/\pi)\omega] = -(1/a)\,\sin[(2\lambda+1)\omega] + (p^2/2)\,r_{\text{eff}}\,\sin[(2\lambda-1)\omega]. \quad (35)$$

Анализ распределения корней (p,ω) этой системы начнем со случая $r_{\text{eff}} = 0$.

Пусть $2\lambda = -1$. Тогда оба уравнения (34) и (35) становятся линейными. Первое из них совпадает с уже исследованным выше эталонным уравнением $h(p) = 1/a$, а второе становится равенством при $\omega = -\pi/2$, но такое значение угла ω не удовлетворяет наложенному выше ограничению $\omega > 0$. Следовательно, уравнения (34) и (35) несовместны. Поэтому при $2\lambda = -1$ и $r_{\text{eff}} = 0$ резонансное состояние отсутствует.

Пусть теперь $2\lambda \geqslant 1$. Если число $(2\lambda+1)\omega$, $\omega \in (0,\pi/2)$, равно нулю функции $\cos(2\lambda+1)\omega$ или нулю $\bar{\omega}_n = n\pi/(2\lambda+1)$ функции $\sin(2\lambda+1)\omega$, то система уравнений (34) и (35) не имеет решений. Поэтому далее полагаем, что $\omega \neq \bar{\omega}_n$, $n = 0,1,\ldots,\lambda+1/2$. Это условие позволяет поделить правые и левые части уравнений (34) и (35) друг на друга, а затем, разрешив полученное уравнение относительно переменной p, вывести универсальную (не зависящую от значения a) связь $p = p(\omega)$ между полярными координатами p и ω резонансного состояния $|(p,\omega),\lambda\rangle$. Запишем эту связь в виде

$$p(\omega) = q_0 \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}+\omega\right] \operatorname{ctg}(2\lambda+1)\omega\right\}; \quad \forall a,\ r_{\text{eff}} = 0, \quad \omega \in (0,\pi/2). \quad (36)$$

Положив $p = p(\omega)$ в уравнении (35), получим уравнение для искомого угла ω

$$q_0^{2\lambda+1}\left[1+\frac{2}{\pi}\omega\right] \exp\left\{-(2\lambda+1)\left[\frac{\pi}{2}+\omega\right] \operatorname{ctg}(2\lambda+1)\omega\right\} \times$$
$$\times \operatorname{cosec}(2\lambda+1)\omega = -\frac{1}{a}. \quad (37)$$

Его левую и правую части считаем функциями $y_1(\omega)$ и $y_2(\omega) \equiv -1/a$. Особенности строения функций $p(\omega)$ и $y_1(\omega)$ поясняет рис. 5. Все нули этих функций совпадают с нулями $\bar{\omega}_n$ функции $\sin(2\lambda+1)\omega$ и достигаются в пределе $\omega \to \bar{\omega}_n + 0$. При $\omega \to \bar{\omega}_n - 0$ функции $p(\omega)$ и $|y_1(\omega)|$ неограниченно возрастают. Функция $y_1(\omega)$ меняет знак при переходе ее аргумента ω через каждую точку $\omega = \bar{\omega}_n$. Число N^- всех интервалов $(\bar{\omega}_{2j-2},\bar{\omega}_{2j-1})$, $j = 1,2,\ldots,N^-$, на которых функция $y_1(\omega)$ является положительной, равно целой части числа $(2\lambda+3)/4$. Число N^+ всех оставшихся интервалов $[\bar{\omega}_{2j-1},\bar{\omega}_{2j})$, $j = 1,2,\ldots,N^+$, на которых эта функция меньше нуля, равно целой части числа $(2\lambda+1)/4$.

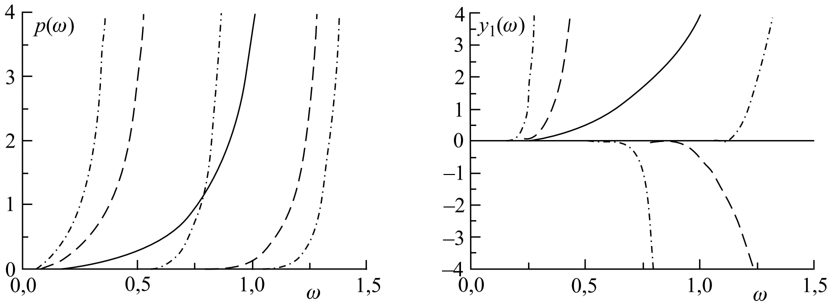

Рис. 5. Графики функции $f(\omega) \equiv 0$ (прямая) и функций $p(\omega)$ и $y_1(\omega)$, равных правой и левой частям соотношений (36) и (37), в следующих случаях: $2\lambda = 1, 3, 5$ — сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые соответственно

Вследствие перечисленных свойств функции $y_1(\omega)$ при условиях $a < 0$ и $2\lambda \geqslant 1$ ее график и прямая $y_2(\omega)$ пересекаются N^- раз, а в случае $a > 0$ и $2\lambda \geqslant 3$ число их точек пересечения равно N^+. В первом случае абсцисса ω_j^+ точки пересечения принадлежит полуинтервалу $[\bar{\omega}_{2j-2}, \bar{\omega}_{2j-1})$, а во втором случае абсцисса ω_j^- точки пересечения находится на полуинтервале $[\bar{\omega}_{2j-1}, \bar{\omega}_{2j})$.

Абсциссы $\omega_j^{\pm}$ являются корнями уравнения (37). В силу связи (36) каждому корню $\omega_j^{\pm}$ отвечает единственное значение $p = p(\omega_j^{\pm})$ переменной p. Это значение сходится к нулю в пределе $|a| \to \infty$. Следовательно, в случае $a < 0$ и $2\lambda \geqslant 1$ квантовая частица имеет N^- резонансных состояний $|(p(\omega_j^-), \omega_j^-), \lambda$, $j = 1, 2, \ldots N^-$, а в случае $a > 0$ и $2\lambda \geqslant 3$ существует N^+ ее резонансных состояний $|(p(\omega_j^+), \omega_j^+), \lambda\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, N^+$.

Символами $\tilde{\omega}_j^+$ и $\tilde{\omega}_j^-$ обозначим средние точки отрезков $[\bar{\omega}_{2j-2}, \bar{\omega}_{2j-1}]$ и $[\bar{\omega}_{2j-1}, \bar{\omega}_{2j}]$. В точках $\tilde{\omega}_j^{\pm}$ функция $\operatorname{ctg}(2\lambda + 1)\omega$ равна нулю. Вследствие связи (36) неравенство $p(\omega) < q_0$ справедливо при условии $\operatorname{ctg}(2\lambda + 1)\omega > 0$. В случае $a < 0$ и $2\lambda \geqslant 1$ это условие выполняется, если $\omega \in (\bar{\omega}_{2j-2}, \tilde{\omega}_j^+)$, где $j = 1, 2, \ldots, N^-$, а в случае $a > 0$ и $2\lambda \geqslant 3$ — если $\omega \in (\bar{\omega}_{2j-1}, \tilde{\omega}_j^-)$, где $j = 1, 2, \ldots, N^+$.

Для большей ясности приведем пример, используя рис. 5. Если $2\lambda = 1$ и $a < 0$, то прямая $y_2(\omega) \equiv -1/a$ пересекает сплошную кривую $y_1(\omega)$ только в одной точке, ее абсцисса — корень $\omega = \omega_1^-$ уравнения (37). Этому корню согласно формуле (36) отвечает единственное значение $p = p(\omega_1^-)$. Следовательно, квантовая частица имеет одно резонансное состояние $|(p(\omega_1^-), \omega_1^-)$, $\lambda = 1/2\rangle$. В случае $2\lambda = 5$ и $a < 0$ прямая $y_2(\omega)$ пересекает штрихпунктирную кривую $y_1(\omega)$ в двух точках с абсциссами $\omega_1^- \in [0, \pi/6)$ $\omega_2^- \in [\pi/3, \pi/2)$. В случае $2\lambda = 5$ и $a < 0$ имеется одна точка пересечения с абсциссой

$\omega_1^+ \in [\pi/6, \pi/3)$. Следовательно, при $a < 0$ существуют два резонансных состояния $|(p(\omega_j^-), \omega_j^-), \lambda = 5/2\rangle$, $j = 1, 2$, а в случае $a > 0$ — одно резонансное состояние $|(p(\omega_1^+), \omega_1^+), \lambda = 5/2\rangle$.

Перейдем к анализу системы уравнений (34) и (35) в случае $r_{\text{eff}} \neq 0$.

Положим $2\lambda = -1$. Исключив из этих уравнений функцию $p^2 r_{\text{eff}}/2$, найдем связь

$$p(\omega; a) = q_0 \exp\left[\frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2}\,\eta(\omega)\right], \quad \eta(\omega) \equiv \frac{\pi + 2\omega}{\sin 2\omega} > 0, \quad \omega \in (0, \pi/2). \tag{38}$$

Используя ее, сведем уравнение (34) к неоднородному уравнению относительно одной неизвестной переменной ω. Чтобы воспользоваться функцией $\tilde{r}_{\text{eff}}(a)$, заданной равенством (27), поделим обе части этого уравнения на основание e натурального логарифма. В результате получим уравнение

$$y_1(\omega) = -\tilde{r}_{\text{eff}}(a)/r_{\text{eff}}, \quad y_1(\omega) \equiv [1/\eta(\omega)]\, \exp\,[\eta(\omega) - 1]. \tag{39}$$

Заметим, что при $\omega \in (0, \pi/2)$ функции $\eta(\omega)$, $p(\omega, a)$ и $y_1(\omega)$ принимают только положительные значения, неограниченно возрастают, если $\omega \to +0$ или $\omega \to \pi/2-$, и имеют единственный локальный минимум, который достигается ими в одной и той же точке $\omega = \tilde{\omega} = 0{,}675908\ldots$ Поэтому уравнение (39) разрешимо при условии

$$r_{\text{eff}} \leqslant r_r(a) \equiv \tilde{r}_{\text{eff}}(a)/y_1(\tilde{\omega}) = -0{,}125361\ldots\, \tilde{r}_{\text{eff}}(a).$$

Если это условие является неравенством, то имеется два простых корня $\omega_1 \in (0, \tilde{\omega})$ и $\omega_2 \in (\tilde{\omega}, \pi/2)$, в противном случае эти корни совпадают и становятся равными числу $\tilde{\omega}$. В силу связи (38) каждому корню $\omega = \omega_i$ отвечает единственное положительное значение переменной $p = p(\omega_i, a)$, которое не превышает число q_0, если

$$a \leqslant \tilde{a}_r \equiv -\pi/\eta(\tilde{\omega}) = -0{,}682459\ldots$$

Поэтому $p = p(\omega_i, a) \to 0$ в пределе $a/\tilde{a}_r \to \infty$. Следовательно, при условиях $2\lambda = -1$, $a \ll \tilde{a}_r$ и $r_{\text{eff}} < r_r(a)$ квантовая частица имеет одно или два околопороговых резонанасных состояния $|p(\tilde{\omega}; a); -1/2\rangle$ или $|p(\omega_i; a), -1/2\rangle$, $i = 1, 2$. Напомним, что при тех же условиях эта частица имеет только одно слабосвязанное состояние.

Теперь исследуем систему уравнений (34) и (35) в случае $r_{\text{eff}} \neq 0$ и $2\lambda = 1$. Если $a < 0$, то уравнение (35) имеет вещественное решение

$$p(\omega; a) = \sqrt{-\frac{\pi}{a\eta(\omega)}}, \quad \omega \in (0, \pi/2), \quad a < 0. \tag{40}$$

В уравнении (34) положим $p = p(\omega; a)$. Обе части полученного уравнения умножим на функцию $\pi a\eta(\omega)/2$, а затем увеличим на константу $2/\pi$ и воспользуемся определением (27) функции $\bar{r}_{\rm eff}(a)$. В итоге выведем следующее уравнение:

$$(2/\pi)\,[\ln\eta(\omega) - \eta(\omega)\,\cos 2\omega + 1] = r_{\rm eff} - \bar{r}_{\rm eff}(-a).$$

Его левую часть считаем функцией $y_1(\omega)$. Эта функция монотонно возрастает на интервале $(0, \pi/2)$, обращается в нуль в одной точке $\bar{\omega} = 0{,}506856\ldots$ и неограниченна на концах этого интервала: $y_1(\omega) \to -\infty$, если $\omega \to 0+$ и $y_1(\omega) \to \infty$ при $\omega \to \pi/2-$. Поэтому исследуемое уравнение имеет один корень ω_1, причем $\omega_1 \in (0, \bar{w}]$ в случае $r_{\rm eff} \leqslant \bar{r}_{\rm eff}(-a)$ и $\omega_1 \in (\bar{w}, \pi/2)$ в противном случае. В силу связи (40) корню ω_1 соответствует одно значение $p = p(\omega_1; a)$ переменной p. Оно меньше числа q_0, если

$$a < \bar{a}_r \equiv -\pi/\left[\, q_0^2\,\eta(\tilde{w})\,\right] = -0{,}541227\ldots,$$

и сходится к нулю при $a/\bar{a}_r \to \infty$. Поэтому при условиях $\lambda = 1/2$ и $a \ll \bar{a}_r$ существует одно околопороговое резонансное состояние $|(p(\omega_1, a), \omega), 1/2\rangle$ квантовой частицы. Напомним, что при тех же условиях эта частица не имеет слабосвязанных состояний.

В оставшемся случае $2\lambda \geqslant 3$ и $r_{\rm eff} \neq 0$ качественный анализ распределения корней системы уравнений (34) и (35) представляется возможным лишь при дополнительных ограничениях $2|\lambda|\omega \ll 1$ или $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$, позволяющих записать эту систему в линейном по переменной ω или $\omega' \equiv \pi/2 - \omega$ приближении.

Предположим, что $0 < 2|\lambda|\omega \ll 1$. В системе уравнений (34) и (35) заменим все тригонометрические функции старшими слагаемыми их известных асимптотик при малых значениях аргументов [35]. В результате для уравнения (34) получим эталонное уравнение

$$p^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln(p/q_0) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\,r_{\rm eff}\,p^2, \tag{41}$$

не содержащее переменную ω, а из уравнения (35) выведем линейное по этой переменной уравнение. Затем из этого уравнения найдем связь

$$\omega = \omega(p) \equiv \frac{2\pi a\,p^{2\lambda+1}}{ar_{\rm eff}(2\lambda - 1)\,p^2 - 4\pi a p^{2\lambda+1} - 2\pi(2\lambda + 1)}.$$

Эта связь означает, что линеаризованное по переменной ω уравнение (35) имеет единственное решение $\omega = \omega(p)$, которое выражается через корень p уравнения (41). Если корень p такой, что значение функции $\omega(p)$ удовлетворяет ограничениям $0 < 2|\lambda|\omega(p) \ll 1$, наложенным выше, то совокупность

$(p, \omega = \omega(p))$ является искомым приближенным решением системы уравнений (34) и (35), а квантовая частица p_1 имеет околопороговое резонансное состояние $|(p, \omega(p)), \lambda\rangle$. Заметим, что уравнение (41) отличается от исследованного в предыдущем разделе уравнения (15) лишь знаком первого $(1/a)$ или второго $(p^2 r_{\text{eff}}/2)$ слагаемого, если число $2\lambda + 1$ не кратно или кратно четырем.

Теперь предположим, что $0 < |\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$. В системе уравнений (34) и (35) перейдем к переменной $\omega' \equiv \pi/2 - \omega$. Полученную систему запишем в линейном по этой переменной приближении. В итоге для уравнения (34) в качестве эталонного получим уже исследованное уравнение (15), а из уравнения (35) выведем связь

$$\omega = \omega(p) \equiv -\frac{4\pi a\,(ip)^{2\lambda+1} - \pi^2\left[4\lambda + 2 + (2\lambda - 1)\,a\,r_{\text{eff}}\,p^2\right]}{8a\,(ip)^{2\lambda+1} + 2\pi\left[4\lambda + 2 + (2\lambda - 1)\,a\,r_{\text{eff}}\,p^2\right]}.$$

В силу этой связи каждому корню p уравнения (15) отвечает единственное значение $\omega(p)$ переменной ω. Если этот корень такой, что $0 < |\lambda|\,[\pi - 2\omega(p)] \ll 1$, то $(p, \omega = \omega(p))$ — искомое приближенное решение системы уравнений (34) и (35), которому соответствует околопороговое резонансное состояние $|(p, \omega(p)), \lambda\rangle$.

Стоит пояснить физический смысл использованных выше ограничений на угол ω. Ограничение $2|\lambda|\omega \ll 1$ означает, что в комплексной плоскости переменной q волновое число $q_r = q_1 - iq_2$ резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$ лежит вблизи положительной вещественной полуоси $(q_2 \ll q_1)$ и тем ближе, чем больше квантовое число λ. Поэтому ширина резонанса Γ мала, а время жизни $\hbar/\Gamma$ обсуждаемого резонансного состояния велико. При условии $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$ волновое число q_r расположено в комплексной плоскости переменной q вблизи отрицательной мнимой полуоси $(q_1 \ll q_2)$ и тем ближе, чем больше квантовое число λ, поэтому выполняется соотношение $\Gamma \gg E_r$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

В разд. 2 впервые дан исчерпывающий анализ эталонного уравнения (15), порожденного приближением эффективного радиуса: при любом значении квантового числа λ найдены условия разрешимости этого уравнения и выявлена зависимость всех его корней от двух параметров: длины рассеяния a и эффективного радиуса r_{eff}. Полученные условия разрешимости (18), (22), (27), (28), (30) и довольно простые формулы (17), (20), (23)–(26), (29), (31), (32) позволяют определить, имеется ли при заданных значениях этих параметров связанное состояние квантовой частицы с малой энергией связи, оценить эту энергию и выявить ее зависимость от трех параметров: λ, a и r_{eff}.

В разд. 3 впервые выведены и исследованы уравнения (34) и (35), определяющие зависимость малых по модулю значений волнового числа резонансного состояния квантовой частицы от длины рассеяния и эффективного радиуса. В результате анализа этих уравнений в случае $r_{\rm eff} = 0$ найдена явная зависимость числа околопороговых резонансных состояний и распределения резонансных энергий от значения квантового числа λ. Как было показано, при любом значении длины рассеяния число резонансных состояний растет с увеличением значения λ, а распределение резонансных энергий зависит от знака длины рассеяния. Следует ожидать, что эти выводы останутся в силе при условии $|q_0^2\, a r_{\rm eff}| \ll 2$, позволяющем считать второе слагаемое асимптотики (14) малой поправкой к ее первому слагаемому при условии $0 < |q| \leqslant q_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Т. 3. 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2004.
2. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1974. С. 247.
3. *Де Альфаро В., Редже Т.* Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
4. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
5. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
6. *Simon B.* // Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279.
7. *Patil S. H.* // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. P. 2400.
8. *Каган Ю. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 386.
9. *Lapidus I. R.* // Am. J. Phys. 1982. V. 50. P. 45.
10. *Lapidus I. R.* // Am. J. Phys. 1986. V. 54. P. 459.
11. *Adhikari S. K.*// Am. J. Phys. 1986. V. 54. P. 362.
12. *Averbuch P. G.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. V. 19. P. 2325.
13. *Verhaar B. J. et al.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1984. V. 17. P. 595.
14. *Verhaar B. J. et al.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 1424.
15. *Bollé D., Gesztesy F.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1279.
16. *Adhikari S. K., Gibson W. G.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 3967.
17. *Randeria M., Duan J.-M., Shieh L.-Y.* // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 327.
18. *Melezhik V. S.* // J. Comp. Phys. 1991. V. 92. P. 67.
19. *Petrov D. S., Holzman M., Shlyapnikov G. V.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2551.
20. *Petrov D. S., Shlyapnikov G. V.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 012706.
21. *Khuri N. N. et al.* // J. Math. Phys. 2009. V. 50. 072105.
22. *Klawunn M., Pikovski A., Santos L.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. 044701.
23. *Rosenkrantz M., Bao W.* // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. 050701.
24. *Melezhik V. S.* // LNCS. 2012. V. 7125. P. 94.

25. *Rakityansky S. A., Elander N.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45. 135209.
26. *Пупышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом. Препринт ОИЯИ Р4-2012-119. Дубна, 2012.
27. *Modugno G. et al.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. 011601.
28. *Clade P. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 170401.
29. *Caar L. D. et al.* // New J. Phys. 2009. V. 11. 055049.
30. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
31. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
32. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. Пер. с франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
33. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
34. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 1922.
35. *Абарамовиц М., Стигун И.* Справочник по специальным функциям. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
36. *Пупышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом. Препринт ОИЯИ Р4-2012-101. Дубна, 2012.
37. *Пупышев В. В.* // ЯФ. 2013. Т. 76. С. 199.

Получено 31 июля 2013 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 21.10.2013.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 2,09. Тираж 270 экз. Заказ № 58088.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/