

P4-2015-20

В. В. Пупышев*

ДВУМЕРНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ
КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ.
СТРОЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В.

P4-2015-20

Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы.
Строение радиальных волновых функций

Предполагается, что заряженная квантовая частица движется в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и рассеивается неподвижным кулоновским центром, лежащим в той же плоскости. Показано, что радиальные волновые функции такой частицы удовлетворяют уравнению Кулона с полуцелым индексом. Исследовано строение этих функций. Рассмотрены три физически интересных предела: некулоновский предел и пределы низких и высоких энергий. Выявлены основные отличия двумерного кулоновского рассеяния от трехмерного.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2015

Pupyshev V. V.

P4-2015-20

Two-Dimensional Coulomb Scattering of a Quantum Particle.
The Structure of the Radial Wave Functions

By assumption, a charged quantum particle moves in the two-dimensional plane of the three-dimensional configuration space and is scattered by the fixed Coulomb center lying in the same plane. It is shown that the radial wave functions of this particle satisfy the Coulomb equation with half-integer index. The structure of these functions is studied. Three physically interesting limits — the non-Coulomb limit and the limits of high and low energies — are considered. The main differences of the two-dimensional Coulomb scattering from the three-dimensional one are clarified.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается светлой памяти Станислава Петровича Меркурьева, чей вклад в построение квантовой теории рассеяния для систем нескольких квантовых частиц [1] невозможно переоценить. Особо значимыми являются подходы, предложенные С. П. Меркурьевым к решению задачи трех заряженных частиц в трехмерном координатном пространстве. К ним, несомненно, относятся разбиение парных кулоновских взаимодействий «гладкой срезкой» [2] и вывод координатных асимптотик волновой функции и ее фаддеевских компонент при больших расстояниях между частицами [3].

Эти подходы представляются ключевыми и для постановки задачи трех заряженных квантовых частиц, движущихся в двумерной плоскости их трехмерного координатного пространства. Первым и неизбежным этапом решения этой задачи является подробное исследование двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы неподвижным силовым центром. Такому исследованию предполагается посвятить серию работ. Первая из них — недавняя работа [4]. Ее продолжением является настоящая работа, устроенная следующим образом.

В разд. 1 перечисляются основные предположения, поясняется физический смысл используемых параметров и аргументов и напомним вывод исходного для наших исследований уравнения Кулона с полуцелым индексом. В разд. 2 для решений этого уравнения сначала выводятся и исследуются представления через вырожденные гипергеометрические функции, а затем представления в виде рядов по степеням кулоновских аргументов и их логарифмов. Разд. 3 посвящен анализу таких рядов в трех физически интересных пределах: в некулоновском пределе и в пределах высоких и низких энергий. В разд. 4 выявляются физически значимые отличия двумерного кулоновского рассеяния от трехмерного. В заключении суммируются основные результаты.

1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть квантовая частица p_1 имеет конечную положительную массу m_1 , вещественный кулоновский заряд z_1 и движется только в двумерной плоскости \mathcal{P} ее трехмерного координатного пространства \mathcal{R}^3 : волновой вектор \mathbf{k}

этой частицы всегда лежит в плоскости \mathcal{P} . Предполагаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является кулоновским силовым центром с вещественным зарядом Z , воздействующим на частицу p_1 посредством кулоновского потенциала. Считаем, что этот потенциал определяется формулой $z_1 Z/r$, где r — расстояние между частицей p_1 и точкой O в плоскости \mathcal{P} . В этой плоскости используем полярные координаты частицы p_1 : расстояние r и угол $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Символом \hbar обозначим константу Планка. Напомним, что волновое число $k \equiv |\mathbf{k}|$ частицы p_1 связано с ее полной энергией E равенством $k = \sqrt{2m_1 E/\hbar^2}$, а параметр $R \equiv \hbar^2/(2m_1 z_1 Z)$ в случае $z_1 Z < 0$ является аналогом боровского радиуса [5]. Символом α обозначим знак этого параметра. Будем различать два случая: случай кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$) и случай кулоновского притяжения ($\alpha = -1$).

Наряду с размерными переменными r и k будем использовать безразмерные аргументы: безразмерные расстояния $x \equiv r/|R|$ и $\rho \equiv kr$, безразмерное волновое число $q \equiv k|R|$, параметр Зоммерфельда $\eta \equiv 1/(2kR) = \alpha/(2q)$ и аргумент $v \equiv \sqrt{8|\eta|\rho}$. Приведем список принятых обозначений:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2m_1 E}{\hbar^2}}, & R &\equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 q_1 Q}, & \alpha &\equiv \text{sign } R, & \eta &\equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q}; \\ x &\equiv \frac{r}{|R|}, & \rho &\equiv kr = qx, & v &\equiv \sqrt{8|\eta|\rho} = 2\sqrt{\frac{r}{|R|}} = 2\sqrt{x}, & x &= \frac{v^2}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Безразмерные «рабочие» переменные s и t переопределяем. Используем формулы с верхними и нижними знаками «+» и «-». В таких формулах по определению берутся или все верхние, или все нижние знаки. Всюду далее индекс λ принимает полуцелые значения ($2\lambda = -1, 1, \dots$), и считается, что $\varepsilon_\lambda = 1$, если $2\lambda = -1$, и $\varepsilon_\lambda = 2$, если $2\lambda \geq 1$.

Волновая функция $\Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta)$ двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы p_1 в плоскости \mathcal{P} подчиняется уравнению Шредингера

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{rR} + k^2 \right) \Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение подстановкой

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = (2\pi\rho)^{-1/2} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda u_\lambda(\rho, \eta) \cos[(2\lambda+1)\varphi/2] \quad (3)$$

сводится к счетной ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) последовательности не зацепляющихся друг с другом радиальных уравнений Шредингера:

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (4)$$

Качественный анализ уравнений (2), (4) и представления (3) дан в предыдущей работе [4]. Уравнение (4) будет исходным для наших исследований. Его решение $u_\lambda(\rho, \eta)$, обладающее физически приемлемой асимптотикой в пределе $\rho \rightarrow \infty$, называем приведенной радиальной волновой функцией частицы p_1 в состоянии $|q, \lambda\rangle$ с сохраняющимися квантовыми числами q и λ .

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

Начнем с замечаний. Любое решение u_λ уравнения (4) можно представить в виде линейной комбинации двух его линейно независимых решений. Обозначим их символами F_λ и H_λ . В уравнении (4) заменим индекс λ индексом ℓ и разрешим индексу ℓ принимать целые значения ($\ell = 0, 1, 2, \dots$). Тогда полученное уравнение станет давно известным в теории трехмерного рассеяния радиальным уравнением Кулона [5]. Многие свойства его решений — радиальных кулоновских волновых функций $F_\ell(\rho, \eta)$ и $H_\ell(\rho, \eta)$ целого порядка ℓ — детально изучены [6].

В силу высказанных замечаний представляется вполне достаточным и логичным найти в случае полуцелых значений $\lambda \geq -1/2$ лишь два линейно независимых решения $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $H_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (4), определив их по аналогии с известными кулоновскими функциями $F_\ell(\rho, \eta)$ и $H_\ell(\rho, \eta)$.

Поступим именно таким образом. В п. 2.1 сформулируем определения функций Кулона F_λ , H_λ и G_λ полуцелого порядка λ и обсудим представления этих функций через вырожденные гипергеометрические функции [7]. Пункт 2 посвятим анализу разложений функций F_λ и G_λ по степенным и логарифмическим функциям переменных ρ , η ; x , q и v , q , определенных формулами (1).

2.1. Представления функций Кулона через функции Куммера и Трикоми. Регулярной в точке $\rho = 0$ волновой функцией Кулона $F_\lambda(\rho, \eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ назовем решение уравнения (4), обладающее асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = O(\rho^{\lambda+1}), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (5)$$

и асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = \sin[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $\delta_\lambda^c(\eta)$ — парциальная кулоновская фаза.

Нерегулярной в точке $\rho = 0$ волновой функцией Кулона полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ считаем решение $H_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (4), удовлетворяющее условию

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \begin{cases} O(\sqrt{\rho} \ln \rho), & 2\lambda = -1, \\ O(\rho^{-\lambda}), & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (7)$$

и условию

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \exp \{ \imath [\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(\eta)] \} + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Кроме решений F_λ и H_λ нам потребуется и нерегулярная в точке $\rho = 0$ функция Кулона полужелого порядка G_λ . Определим ее формулой

$$G_\lambda(\rho, \eta) \equiv H_\lambda(\rho, \eta) - \imath F_\lambda(\rho, \eta), \quad 2\lambda = -1, 1, 3, \dots \quad (9)$$

Вследствие такого определения и формул (5)–(8) функция $G_\lambda(\rho, \eta)$ в пределе $\rho \rightarrow 0$ ведет себя так же, как функция $H_\lambda(\rho, \eta)$, а в пределе $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \cos [\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Решим уравнение (4) с условиями (5)–(10). Подстановкой

$$\xi = -2\imath\rho, \quad u_\lambda(\rho, \eta) = \rho^{\lambda+1} \exp(\imath\rho) U(\xi)$$

сведем это уравнение к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$[\xi \partial_\xi^2 + (2\lambda + 2 - \xi) \partial_\xi - (\lambda + 1 + \imath\eta)] U(\xi) = 0.$$

Как известно [7], такое уравнение имеет два линейно независимых решения, которыми являются функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ и функция Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$ с комплексным параметром $a = \lambda + 1 + \imath\eta$ и целым параметром $c = 2\lambda + 2$.

Следовательно, при любых множителях $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ решениями исходного уравнения (4) будут произведения

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &\equiv C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(\imath\rho) \Phi(\lambda + 1 + \imath\eta, 2\lambda + 2, -2\imath\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &\equiv D_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(\imath\rho) \Psi(\lambda + 1 + \imath\eta, 2\lambda + 2, -2\imath\rho). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя известные асимптотики [7] функций $\Phi(a, c; \xi)$ и $\Psi(a, c; \xi)$, убедимся в том, что обсуждаемые произведения (11) имеют требуемые асимптотики (5)–(8) тогда и только тогда, когда кулоновская фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$ определена формулой

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \arg \Gamma(\lambda + 1 + \imath\eta), \quad (12)$$

множитель $C_\lambda(\eta)$ задан равенством

$$C_\lambda(\eta) = 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + \imath\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} \exp(-\pi\eta/2), \quad (13)$$

а множитель $D_\lambda(\eta)$ — равенством

$$D_\lambda(\eta) = (-1)^{\lambda+1/2} 2^{2\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + \imath\eta)}{\Gamma(2\lambda + 2) C_\lambda(\eta)}. \quad (14)$$

Осталось найти функцию G_λ . Для этого в ее определении (9) заменим уже найденные функции F_λ и H_λ правыми частями равенств (11).

Выведем полезные представления функции $C_\lambda(\eta)$ переменной η .

Вследствие определения (13) и известных свойств гамма- и пси-функций [7]

$$|\Gamma(1/2 + i\eta)| = \pi / \operatorname{ch}(\pi\eta), \quad \operatorname{Im} \Psi(1/2 + i\eta) = (\pi/2) \operatorname{th}(\pi\eta), \quad \Gamma(1+t) = t\Gamma(t),$$

для квадрата функции $C_{-1/2}(\eta)$ имеются три представления:

$$C_{-1/2}^2(\eta) = \frac{\pi}{2} \frac{\exp(-\pi\eta)}{\operatorname{ch}(\pi\eta)} = \frac{\pi}{\exp(2\pi\eta) + 1} = \pi/2 - \operatorname{Im} \Psi(1/2 + i\eta), \quad (15)$$

а все остальные функции $C_\lambda(\eta)$ можно вычислить по рекуррентной формуле

$$C_\lambda(\eta) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}}{\lambda(2\lambda + 1)} C_{\lambda-1/2}(\eta), \quad 2\lambda > -1,$$

или, используя порожденное этой формулой представление

$$C_\lambda(\eta) = \frac{2^{\lambda+1/2}}{(2\lambda + 1)!} C_{-1/2}(\eta) \prod_{p=1/2}^{\lambda} \sqrt{p^2 + \eta^2}, \quad 2\lambda > -1. \quad (16)$$

Из этого представления следует, что функция

$$P_\lambda(q^2) \equiv q^{2\lambda+1} \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}(\eta)} \right]^2 = \frac{1}{[(2\lambda + 1)!]^2} \times \quad (17)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{2}{3} \lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1) q^2 \left[1 + \frac{1}{15} (\lambda - 1)(2\lambda - 1)(5\lambda + 6) q^2 + \dots \right] \right\}$$

является полином степени $\lambda/2 + 1$ переменной q^2 .

2.2. Разложения функций Кулона по степенным и логарифмическим функциям. Для вывода и анализа разложений функций $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $G_\lambda(\rho, \eta)$ по степенным и логарифмическим функциям аргументов ρ и η используем известные представления [7] функции Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ и функции Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$. Приведем и обсудим такие представления. Функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ является степенным рядом

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{\xi^n}{n!} = 1 + \frac{a}{c} \frac{\xi}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{\xi^2}{2!} + \dots \quad (18)$$

и удовлетворяет тождеству (преобразованию) Куммера

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \exp(\xi) \Phi(c - a, c; -\xi). \quad (19)$$

Случай неотрицательного, но целого значения $n + 1$, $n = 0, 1, \dots$, параметра c является особым (логарифмическим) случаем. В этом случае функция Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$ имеет довольно сложное строение и представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \Psi(a, n + 1; \xi) = & \frac{(-1)^{n-1}}{n! \Gamma(a - n)} \left\{ \Phi(a, n + 1; \xi) \ln \xi + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a)_p}{(n + 1)_p} [\Psi(a + p) - \Psi(1 + p) - \Psi(1 + n + p)] \frac{\xi^p}{p!} \right\} + \\ & + \frac{(n - 1)!}{\Gamma(a)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(a - n)_p}{(1 - n)_p} \frac{\xi^{p-n}}{p!}. \quad (20) \end{aligned}$$

Первое слагаемое этой суммы — произведение логарифмической функции $\ln \xi$ и функции $\Phi(a, c; \xi)$, второе слагаемое — бесконечный ряд, содержащий пси-функции, а третье слагаемое — конечная сумма, которая полагается равной нулю в случае $n = 0$.

Формулы (18) и (20) содержат гамма-функцию $\Gamma(t)$ и символ Похгаммера $(a)_n$. Поэтому стоит напомнить, что при комплексном сопряжении, которое далее обозначается символом $*$, гамма- и пси-функции преобразуются по правилам $\Gamma^*(t) = \Gamma(t^*)$ и $\Psi^*(t) = \Psi(t^*)$, а символ Похгаммера $(a)_n$ вычисляется по формулам

$$(a)_0 = 1; \quad (a)_n \equiv a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \quad n = 1, 2, \dots$$

Например,

$$(2\lambda + 2)_n = \frac{\Gamma(\nu + n + 1)}{(2\lambda + 1)!}, \quad (-2\lambda)_n = (-1)^n \frac{(\nu - 1 - n)!}{(2\lambda)!}, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1. \quad (21)$$

Приступим к выводу и анализу разложений функций F_λ и G_λ .

Вывод представления функции $F_\lambda(\rho, \eta)$ в виде степенного ряда по переменной ρ довольно прост. В первом из равенств (11) заменим функцию Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ ее разложением (18), положив в нем $a = \lambda + 1 + \nu \eta$ и $c = 2\lambda + 2$, $\xi = -2\nu\rho$, а затем воспользуемся тождеством Куммера (19). В итоге получим два искомых разложения

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(\pm \nu \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1 \pm \nu \eta)_n}{(2\lambda + 2)_n} \frac{(\mp 2\nu \rho)^n}{n!}. \quad (22)$$

Положив в этих разложениях $\rho = qx$ и $\eta = \alpha/(2q)$, выведем еще два представления

$$f_\lambda(\rho, \eta) \equiv \frac{F_\lambda(\rho, \eta)}{q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta)} = x^{\lambda+1} \exp(\pm \nu qx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1 \pm \nu(\alpha/(2q)))_n}{(2\lambda + 2)_n} \frac{(\mp 2\nu qx)^n}{n!}. \quad (23)$$

В силу этих представлений функция f_λ инвариантна относительно замены $\iota \rightarrow -\iota$. Такая замена равносильна как комплексному сопряжению функции f_λ , так и замене $q \rightarrow -q$ переменной q . Следовательно, F_λ и f_λ — вещественные функции, а f_λ — четная функция переменной q . Функция F_λ из-за множителя $q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta)$ не является таковой.

Кроме представлений (22) и (23) потребуется специальное представление функции F_λ . Выведем его. Для этого в формуле (23) возьмем все верхние знаки, перейдем к переменным $v = 2\sqrt{x}$ и q и воспользуемся первым из равенств (21). Полученное соотношение запишем в виде равенства

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) (2\lambda + 1)! \frac{v}{2} f_\lambda^\pm(v, q), \quad \rho = qx = q \frac{v^2}{4}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad (24)$$

где по определению

$$f_\lambda^\pm(v, q) \equiv \exp\left(\iota q \frac{v^2}{4}\right) \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1 \pm \iota/(2q))_n}{\Gamma(\nu + n + 1) n!} \left(-2\iota q \frac{v^2}{4}\right)^n, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1, \quad (25)$$

а все верхние или все нижние знаки берутся в случае $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Нерегулярная волновая функция G_λ , определенная формулой (9), имеет более сложное строение. Чтобы выявить его, докажем равенство

$$G_\lambda(\rho, \eta) = -\frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta), \quad (26)$$

в котором $h^c(\eta)$ — неаналитическая функция,

$$h^c(\eta) \equiv \operatorname{Re} \Psi(1/2 + \iota \eta) - \ln |\eta|, \quad (27)$$

а $\Theta_\lambda(\rho, \eta)$ — следующий ряд:

$$\begin{aligned} & \Theta_\lambda(\rho, \eta) \equiv \\ & \equiv - \left\{ q^{2\lambda+1} \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}(\eta)} \right]^2 \right\} x^{\lambda+1} \exp(\iota qx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1 + \iota \eta)_n}{(2\lambda + 2)_n} \frac{(-2\iota qx)^n}{n!} \times \\ & \quad \times \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p + \iota \eta} - \Psi(n + 1) - \Psi(2\lambda + 2 + n) + \ln x \right] + \\ & + \frac{(-1)^{2\lambda+1}}{2\lambda + 1} x^{-\lambda} \exp(\iota qx) \sum_{n=0}^{2\lambda} \frac{(-\lambda + \iota \eta)_n}{(-2\lambda)_n} \frac{(-2\iota qx)^n}{n!}, \quad \rho = qx, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \end{aligned} \quad (28)$$

где фигурными скобками выделен полином (17) переменной q^2 .

Приступим к доказательству. Чтобы его заметно сократить, вместо определения (9) функции G_λ используем следующее из него равенство

$$-i G_\lambda(\rho, \eta) = -i H_\lambda(\rho, \eta) - F_\lambda(\rho, \eta). \quad (29)$$

Сначала выведем специальное разбиение функции $-i H_\lambda$, а затем выделим из него искомую мнимую часть $-G_\lambda$ этой функции. Во втором равенстве (11) выразим множитель $D_\lambda(\eta)$ через множитель $C_\lambda(\eta)$ по формуле (14), а функцию $\Psi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2, -2i\rho)$ заменим ее разложением (20), положив в нем $a = \lambda + 1 + i\eta$, $c = 2\lambda + 2$ и $\xi = -2i\rho$. Далее, используя представление (22) функции F_λ с верхними знаками, запишем исследуемое разложение функции $-i H_\lambda$ в виде суммы трех слагаемых, определенных следующих образом: первое слагаемое — функция

$$-i F_\lambda(\rho, \eta) \ln(-2i\rho)/C_\lambda^2(\eta),$$

второе слагаемое — произведение функции

$$i \left[(C_\lambda(\eta)/C_{-1/2}^2(\eta)) \right] \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho)$$

и бесконечного ряда по целым степеням аргумента $(-2i\rho)^n$, $n = 0, 1, \dots$, а третье слагаемое — произведение конечной суммы ($n \leq 2\lambda$) по таким же степеням и функции

$$-i (-1)^{2\lambda+1} [(2\lambda + 1) C_\lambda(\eta)]^{-1} \rho^{-\lambda} \exp(i\rho).$$

В первом слагаемом множитель $\ln(-2i\rho)$ представим в виде

$$\ln(-2i\rho) = \ln \rho - i\pi/2 = \ln[(2k/|R|)(r/|R|)] - i\pi/2 = \ln x - \ln|\eta| - i\pi/2, \quad (30)$$

а функцию $\Psi(n + \lambda + 1 + i\eta)$, содержащуюся во втором слагаемом в качестве коэффициента, заменим известной суммой [7]

$$\Psi(n + \lambda + 1 + i\eta) = \sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p + i\eta} + \operatorname{Re} \Psi(1/2 + i\eta) + i \operatorname{Im} \Psi(1/2 + i\eta), \quad (31)$$

в которой первое слагаемое считается равным нулю в случае $n + \lambda = 1/2$. В полученном после замен (30) и (31) представлении функции $-i H_\lambda$ приведем подобные члены таким образом, чтобы слагаемые $-\ln|\eta|$ и $\operatorname{Re} \Psi(1/2 + i\eta)$ разбиений (30) и (31) оказались слагаемыми алгебраической суммы (27), а слагаемые $-i\pi/2$ и $i \operatorname{Im} \Psi(1/2 + i\eta)$ этих же разбиений и коэффициент $i C_{1/2}^2(\eta)$ образовали алгебраическую сумму

$$i \left[\pi/2 - \operatorname{Im} \Psi(1/2 + i\eta) - C_{1/2}^2(\eta) \right]. \quad (32)$$

Согласно формулам (15) такая сумма равна нулю. Поэтому исследуемое разбиение функции $-iH_\lambda$ существенно упростится, а его мнимая часть, взятая с обратным знаком и равная функции G_λ , запишется в виде (26)–(28), что и требовалось показать.

Выведем еще одно представление функции Θ_λ . Для этого в формуле (28) перейдем к переменным $v = 2\sqrt{x}$ и q , а затем применим оба соотношения (21). Полученные таким способом равенства представим в виде

$$\Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \theta_\lambda^\pm(v, q), \quad \rho = qx = q\frac{v^2}{4}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad (33)$$

где функции θ_λ^\pm определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^\pm(v, q) \equiv & -\frac{1}{2} [(2\lambda + 1)!]^2 P_\lambda(q^2) \exp\left(iq\frac{v^2}{4}\right) \times \\ & \times \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + n)!n!} \left(\lambda + 1 \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(-2iq\frac{v^2}{4}\right)^n \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p \pm i/(2q)} - \Psi(n + 1) - \Psi(\nu + n + 1) + 2\ln(v/2) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \exp\left(iq\frac{v^2}{4}\right) \left(-\frac{2}{v}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - n - 1)!}{n!} \left(-\lambda \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(2iq\frac{v^2}{4}\right)^n, \\ & \nu \equiv 2\lambda + 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь P_λ — полином (17), а верхние или нижние знаки берутся при $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Выявим важные свойства функции Θ_λ .

Как показано в работе [4], функция G_λ благодаря ее асимптотике (10) является вещественной. В силу определения (27) функция h^c вещественная. Поэтому из равенства (26) следует, что функция Θ_λ тоже вещественная. Следовательно, комплексное сопряжение ряда (28) не изменяет его, но такое сопряжение сводится к замене $i \rightarrow -i$ во всех множителях и слагаемых этого ряда. Эта же замена порождается и инверсией $q \rightarrow -q$. Значит, Θ_λ — четная функция переменной q . Функция G_λ таковой не является из-за наличия в ее представлении (26) функции $q^\lambda C_\lambda(\eta)$.

Теперь заметим, что вследствие соотношения (26) верно равенство

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) = q^\lambda C_\lambda(\eta) \left[G_\lambda(\rho, \eta) + \frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) \right]. \quad (35)$$

Следовательно, функция Θ_λ удовлетворяет уравнению Кулона (4) и благодаря асимптотикам (6) и (10) его решений F_λ и G_λ имеет асимптотику

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) \sim \left(\frac{q}{\rho}\right)^\lambda \begin{cases} \ln(q/\rho), & 2\lambda = -1, \\ (2\lambda + 1)^{-1}, & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0,$$

и асимптотику

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) \sim \frac{q^\lambda C_\lambda(\eta)}{\cos \alpha^c(\eta)} \cos[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta) - \alpha^c(\eta)], \quad \rho \rightarrow \infty,$$

где угол α^c такой, что

$$\sin \alpha^c(\eta) \equiv \frac{h^c(\eta)}{\sqrt{[h^c(\eta)]^2 + C_{-1/2}^4(\eta)}}, \quad \alpha^c(\eta) \in [0, \pi].$$

Выведем удобное для дальнейшего анализа и вычислений представление функции h^c , определенной формулой (27). Так как $\Psi^*(t) = \Psi(t^*)$, то $h^c(\eta)$ — четная функция: $h^c(\eta) = h^c(-\eta)$. Поэтому можно ограничиться ее анализом лишь на полуоси $\eta > 0$, что и делается всюду далее. В известном представлении пси-функции [7]

$$\Psi(t) = \ln t - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+t} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+t} \right) \right] \quad (36)$$

положим $t = 1/2 + i\eta$ и применим формулу Муавра:

$$t = 1/2 + i\eta = (1/4 + \eta^2)^{1/2} \exp[i \operatorname{arctg}(2\eta)].$$

Затем, используя тождество

$$\ln t - \ln |\eta| \equiv \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) + i \operatorname{arctg}(2\eta),$$

выведем искомое представление функции h^c в виде разности

$$h^c(\eta) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) - S(\eta) \quad (37)$$

логарифмической функции и функции S , определенной как бесконечный ряд

$$S(\eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2 + 4\eta^2} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{8(n+1)}{(2n+1)^2 + 4\eta^2} \right] \right\}. \quad (38)$$

Завершим настоящий раздел двумя замечаниями. Все полученные представления (22)–(28) и (33)–(35) верны в любом из случаев $2\lambda = \pm 1, 3, \dots$. Представления (26)–(28), но лишь в частном случае $2\lambda = -1$, получены ранее в работе [8].

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

Дадим определения трех физически интересных пределов.

Некулоновский предел порождается двумя условиями: волновое число k фиксировано и положительно, модуль параметра R неограниченно растет ($|R| \rightarrow \infty$). Согласно списку (1) принятых обозначений в таком пределе $\eta = 1/(2kR) \rightarrow 0$, $q = k|R| \rightarrow 0+$. Поэтому в уравнении Шредингера (2) кулоновский потенциал $1/(rR)$ сходится к нулю на всей полуоси $r > |R|^{-1}$.

Предел высоких энергий выделяется двумя условиями: параметр R фиксирован и отличен от нуля, а энергия E неограниченно возрастает. В таком пределе $k \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, а $\eta \rightarrow 0$. Поэтому в уравнении (2) модуль кулоновского потенциала $1/(rR)$ становится малой добавкой к квадрату волнового числа k в области $r > (k^2|R|)^{-1}$.

Вследствие данных выше пояснений в некулоновском пределе ($\eta \rightarrow 0$) и в пределе высоких энергий ($\eta \rightarrow 0$) все кулоновские функции одной или двух переменных η или ρ и η должны подчиняться одинаковым предельным соотношениям.

Для исследуемых уравнений Шредингера и Кулона (2) и (4) пределом нулевой энергии назовем предел $E \rightarrow 0+$ при фиксированных значениях параметра $R \neq 0$ и порядка $\lambda \geq -1/2$. В таком пределе $k \rightarrow 0+$ и $q \rightarrow 0+$, а $|\eta| \rightarrow \infty$.

В настоящем разделе ключевыми окажутся известные разложения [7] функций Бесселя первого рода J_ν , Y_ν и модифицированных функций Бесселя I_ν и K_ν . Приведем эти разложения в компактном виде. Обе функции I_ν и K_ν — степенные ряды:

$$\begin{Bmatrix} I_\nu(t) \\ J_\nu(t) \end{Bmatrix} = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm t^2/4)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad (39)$$

функции K_ν и Y_ν устроены сложнее:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 2(-1)^\nu K_\nu(t) \\ -\pi Y_\nu(t) \end{Bmatrix} = \\ & = \left(\mp \frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} [\Psi(n+1) + \Psi(\nu+n+1)] \frac{(\pm t^2/4)^n}{(\nu+n)! n!} - \\ & - 2 \ln(t/2) \begin{Bmatrix} I_\nu(t) \\ J_\nu(t) \end{Bmatrix} + \left(\frac{2}{t}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{n!} \left(\pm \frac{t^2}{4}\right)^n. \quad (40) \end{aligned}$$

Последовательно исследуем поведение всех кулоновских функций в некулоновском пределе и в пределах высоких и низких энергий.

3.1. Некулоновский предел и предел высоких энергий. Найдем асимптотику фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ в пределе $\eta \rightarrow 0$. В известном разложении [7] гамма-функции комплексного аргумента $s + it$ в ряд Лорана с центром в точке s ,

$$\Gamma(s + it) = \Gamma(s) \left\{ 1 + it\Psi(s) - (1/2) [\partial_s\Psi(s) + \Psi^2(s)] t^2 + O(it^3) \right\}, \quad t \rightarrow 0,$$

положим $s = \lambda + 1$ и $t = \eta$. Используя полученное представление, из определения (12) фазы $\delta_\lambda(\eta)$ выводим ее искомую асимптотику

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \Psi(\lambda + 1)\eta + \eta^2 + O(\eta^3), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (41)$$

Исследуем эту асимптотику. Для этого в известном представлении пси-функции [7]

$$\Psi(n + 1/2) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (42)$$

содержащем константу Эйлера $\gamma = 0,57721566\dots$, положим $n = \lambda + 1/2$. Из полученной таким образом формулы следуют неравенства $\Psi(\lambda + 1) < 0$, $2\lambda = -1$, и $\Psi(\lambda + 1) > 0$, $2\lambda \geq 1$. Следовательно, в случае $2\lambda = -1$ старшее слагаемое асимптотики (41) фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ и переменная η имеют противоположные знаки, а в случае $2\lambda \geq 1$ — одинаковые.

Например, согласно обсуждаемым формулам (41) и (42), если $\eta \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \delta_{-1/2}^c(\eta) &\sim -(\gamma + 2 \ln 2)\eta, & \delta_{1/2}^c(\eta) &\sim (2 - \gamma - 2 \ln 2)\eta, \\ \delta_{3/2}^c(\eta) &\sim (8/3 - \gamma - 2 \ln 2)\eta. \end{aligned}$$

Заметим, что из определений (12) и (14) функций $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ следуют предельные соотношения

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} C_\lambda(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\lambda)!!}{(2\lambda + 1)!} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-\lambda-1}}{(\lambda + 1/2)!}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} D_\lambda(\eta) = (-1)^{\lambda+1/2} 2^{\lambda+1}. \quad (43)$$

Найдем некулоновскую асимптотику функции h^c . Напомним, что эта функция равна разности (37) логарифмической функции и бесконечного ряда S , заданного формулой (38). Используя известные ряды Тейлора [6]

$$1/(1 + s) = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots, \quad \ln(1 + s) = s - s^2/2 + s^3/3 + \dots$$

с центром в точке $s = \eta^2 = 0$, убедимся в том, что $S(\eta) = S(0) + O(\eta^2)$, если $\eta \rightarrow 0$. Сравнив ряд $S(0)$ с разложением пси-функции (36) в случае $t = 1/2$ и используя представление (42) такой пси-функции, выведем цепочку равенств

$$S(0) = [\Psi(1/2)] + \ln 2 = -[\gamma + 2 \ln 2] + \ln 2 = -\gamma - \ln 2.$$

Далее, применив формулу (37), получаем искомую асимптотику

$$\begin{aligned} h^c(\eta) &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) + S(0) + O(\eta^2) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) - \gamma - \ln 2 + O(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Осталось найти некулоновские пределы функций F_λ , G_λ и H_λ . Достигнем эту цель по следующей схеме. Разложения (22) и (28) функций F_λ и Θ_λ , а затем и равенства (9) и (26), определяющие функции H_λ и G_λ , запишем в точке $\eta = 0$. Значения функции C_λ и h^c в этой же точке найдем по формулам (43) и (44). Применим равенства (21). Полученные разложения функций F_λ и G_λ в случае $\eta = 0$ сравним с соответствующими разложениями (39) и (40) функций Бесселя $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ целого порядка $\nu = m = \lambda + 1/2$ и переменной $t = \rho$. В итоге придем к следующему выводу: в некулоновском пределе функции F_λ , G_λ и H_λ вырождаются в произведения функции $\sqrt{\pi\rho/2}$ и функций Бесселя J_m , Y_m и $H_m^{(1)}$ целого порядка $m = \lambda + 1/2$:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &= \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_m(\rho), \quad G_\lambda(\rho, \eta) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} Y_m(\rho), \\ H_\lambda(\rho) &= i \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_m^{(1)}(\rho), \quad \eta = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Завершая настоящий пункт, отметим, что соотношения (41) и (43)–(45) верны как в некулоновском пределе, так и в пределе высоких энергий.

3.2. Предел нулевой энергии рассеяния. Начнем с исследования кулоновской фазы $\delta_\lambda^\xi(\eta)$. По определению (12) эта фаза равна аргументу гамма-функции $\Gamma(t)$ переменной

$$t \equiv \lambda + 1 + i\eta = \sqrt{(\lambda + 1)^2 + \eta^2} \exp \left[i \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda + 1} \right].$$

В рассматриваемом пределе $q \rightarrow 0+$, а $|\eta| \rightarrow \infty$. Значит, модуль переменной t неограниченно возрастает. Поэтому можно применить известную формулу Стирлинга [7]

$$\Gamma(t) = \sqrt{2\pi} \exp[-t + (t - 1/2) \ln t] (1 + O(t^{-1})), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\arg t| < \pi,$$

а затем представить кулоновскую фазу в виде суммы

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^\xi(\eta) &= \left\{ \frac{\eta}{2} \ln [(\lambda + 1)^2 + \eta^2] - \eta + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda + 1} \right\} \times \\ &\quad \times [1 + O(\tau(\lambda, q))], \end{aligned} \quad (46)$$

в которой функция

$$\tau(\lambda, q) \equiv [(\lambda + 1)^2 + q^{-2}]^{1/2}$$

убывает в пределе $q \rightarrow 0+$ как $O(q)$ при любом фиксированном λ .

Асимптотика (46) имеет особенность: только в случае $2\lambda = -1$ ее слагаемое $(\lambda + 1/2) \arctg[\eta/(\lambda + 1)]$ обращается в нуль. Согласно этой же асимптотике фаза $\delta_\lambda^\xi(\eta)$ при $q \rightarrow 0+$ и любом λ неограниченно растет или убывает, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Заметим, что модуль аргумента $t = \lambda + 1 + i\eta$ неограниченно возрастает и в случае $\lambda \rightarrow \infty$, $|\eta| < \infty$. Поэтому и в этом случае можно использовать формулу Стирлинга и показать, что фаза $\delta_\lambda^\xi(\eta)$ имеет асимптотику (46), в которой функция $\tau(\lambda, q)$ убывает как $O(\lambda^{-1})$ при любом фиксированном, но ненулевом значении q .

Теперь исследуем поведение функции $C_\lambda(\eta)$ в том же пределе $q \rightarrow 0+$. В силу формул (15) и (16) эта функция имеет асимптотику

$$C_\lambda(\eta) \sim \frac{2^{\lambda+1/2} \sqrt{\pi}}{(2\lambda + 1)!} |\eta|^{\lambda+1/2} \begin{cases} \exp(-\pi|\eta|), & \alpha = +1, \\ 1, & \alpha = -1, \end{cases} \quad q \rightarrow 0+. \quad (47)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0+$ функция $C_\lambda(\eta)$ быстро убывает, если $\alpha = 1$, и растет как обратная целая степень $\lambda + 1/2$ переменной q , если $\alpha = -1$.

Выведем асимптотику функции $h^c(\eta)$ при $q \rightarrow 0$. По определению (27) эта функция четная. Поэтому рассмотрим только случай $\eta > 0$. Введем переменную

$$t \equiv 1/2 + i\eta = \sqrt{1/4 + \eta^2} \exp[i \arctg(2\eta)], \quad \eta > 0.$$

В формуле (27) заменим пси-функцию такой переменной известным разложением [7]

$$\Psi(t) = \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} + \frac{1}{120t^4} - \frac{1}{256t^6} + O(|t|^{-8}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \arg t < \pi.$$

Затем, применив равенство

$$\ln t - \ln |\eta| = \frac{1}{2} \ln(1 + q^2) + i \arctg(1/q)$$

и известное представление [6]

$$\ln(1 + q^2) = q^2 - \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{3}q^6 - \frac{1}{4}q^8 + \dots, \quad q \rightarrow 0,$$

получим искомую асимптотику

$$h^c(\eta) = -\frac{1}{6}q^2 - \frac{7}{60}q^4 - \frac{1}{4}q^6 - \frac{49}{24}q^8 + O(q^{10}), \quad \eta = \alpha/(2q), \quad q \rightarrow 0. \quad (48)$$

Перейдем к выводу предельных ($q \rightarrow 0+$) соотношений для функций F_λ , Θ_λ и G_λ . Сначала в рядах (24), (25) и (33), (34) почленно перейдем к пределу $q \rightarrow 0+$. Для этого используем асимптотику (48), равенства

$$\left(\lambda + 1 \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\pm \frac{v^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [\mp 2iq(j + \lambda) + 1]$$

и равенства

$$\left(-\lambda \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(2iq \frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\mp \frac{v^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [\mp 2iq(j - \lambda - 1) + 1].$$

Затем сравним полученные разложения функций f_λ^\pm и Θ_λ с соответствующими разложениями (39) и (40) функций Бесселя целого порядка $\nu = 2\lambda + 1$ и переменной $t = v$. Сформулируем результаты сравнения: функция F_λ удовлетворяет равенствам

$$\lim_{q \rightarrow 0+} \frac{F_\lambda(\rho, \eta)}{q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta)} = (2\lambda + 1)! \frac{v}{2} \begin{cases} I_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ J_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1, \end{cases} \quad (49)$$

а функция Θ_λ подчиняется предельным соотношениям

$$\lim_{q \rightarrow 0+} \Theta_\lambda(\rho, \eta) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \begin{cases} K_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ -(\pi/2) Y_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \quad (50)$$

Теперь нетрудно найти асимптотику функции $q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta)$ при $q \rightarrow 0+$. Для этого умножим обе части равенства (26) на функцию $q^\lambda C_\lambda(\eta)$, функцию $F_\lambda(\rho, \eta)$ заменим по формуле (49) и воспользуемся определением (17) полинома $P_\lambda(q^2)$. В результате выведем искомое асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta) &\sim \\ &\sim \Theta(\rho, \eta)|_{q=0} + h^c(\eta) P_\lambda(q^2) (2\lambda + 1)! \frac{v}{2} \begin{cases} I_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1; \\ J_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (51)$$

Исследуем это представление. Согласно формулам (17) и (48), если $q \rightarrow 0+$, то полином $P_\lambda(q^2)$ сходится к числу $[(2\lambda + 1)!]^{-2}$, а функция $h^c(\eta)$

убывает как $O(q^2)$. Поэтому обсуждаемое представление и формулы (50) порождают соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0+} q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta) &= \Theta(\rho, \eta)|_{q=0} = \\ &= \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \begin{cases} K_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1; \\ -(\pi/2) Y_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \quad (52) \end{aligned}$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0+$ функции $C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta)$ и $\Theta(\rho, \eta)$ совпадают.

4. ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Используя полученные в разд. 2 и 3 представления, сначала выявим физически интересные особенности парциальных фаз δ_λ^c , затем обсудим особенности строения функций h^c и G_λ и, завершая настоящий раздел, сравним двумерное кулоновское рассеяние с трехмерным.

4.1. Особенности кулоновских парциальных фаз. Как следует из определения (12) и асимптотик (41), (46), все фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$, $2\lambda > -1$, являются нечетными и непрерывными функциями аргумента η . Знаки этих фаз при любом η совпадают со знаком параметра R кулоновского потенциала $1/(Rr)$. Любая фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$, $2\lambda > -1$, равна нулю только в точке $\eta = 0$ и монотонно возрастает с ростом аргумента η на всей полуоси $\eta > 0$.

Поведение фазы $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ радикально отличается от поведения всех остальных фаз. Действительно, в силу равенств (44) и (48) фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ отрицательная или положительная в пределе малых или больших положительных значений ее аргумента η . Следовательно, в области $0 < \eta < \infty$ эта фаза должна иметь по крайней мере один локальный минимум и один нуль.

Перечисленные выше особенности подтверждает рис. 1, иллюстрирующий зависимость фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$ и $d_\lambda^c(q) \equiv \delta_\lambda^c(\eta)$, $\eta = 1/(2q)$, $2\lambda = \pm 1, 3$, от переменной η и переменной $q = 1/(2\eta)$. Фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ имеет локальный минимум в точке $\eta = \eta_1 = 1,047665\dots$. В этой точке фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ принимает значение $\delta_{-1/2}^c(\eta_1) = -0,956229\dots$. Числу η_1 отвечает число $q = q_1 = 1/(2\eta_1) = 0,477254\dots$. Фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ имеет простой нуль в точке $\eta = \eta_2 = 2,702690\dots$. Ей соответствует точка $q = q_2 = 1/(2\eta_2) = 0,185000\dots$

4.2. Особенности функций h^c и G_λ . В силу определения (27) и асимптотических представлений (44) и (48) функция $h^c(\eta)$ является четной и непрерывной функцией аргумента $\eta \neq 0$, причем положительной или отрицательной и сходящейся к нулю в пределе его малых или больших по модулю значений. Следовательно, в области $0 < \eta < \infty$ эта функция должна иметь по

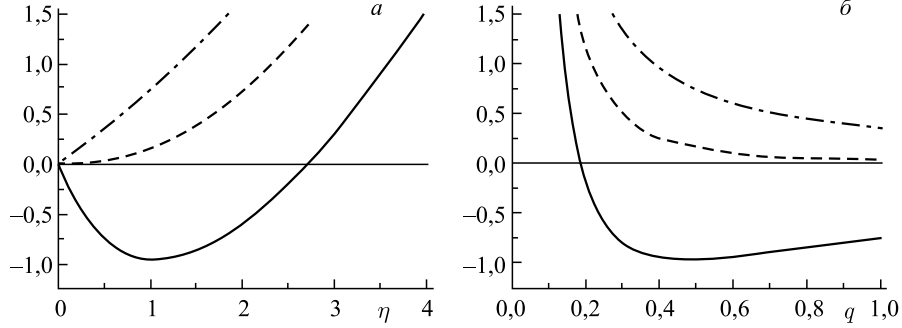


Рис. 1. Зависимость кулоновских фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$ и $d_\lambda^c(q) \equiv \delta_\lambda^c(\eta)$, $\eta = 1/(2q)$, от их аргументов η и q в трех случаях: $2\lambda = -1, 1, 3$ — сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые соответственно; а) графики фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$; б) графики фаз $d_\lambda^c(q)$

крайней мере один локальный минимум и один нуль. Эти выводы подтверждает численный анализ функции $h^c(\eta)$ и функции $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$, $\eta = 1/(2q)$. Функция $h^c(\eta)$ имеет локальный минимум в точке $\eta = \eta_3 = 0,361049\dots$. В этой точке функция $h^c(\eta)$ принимает значение $h^c(\eta_3) = -0,207638\dots$. Числу η_3 отвечает число $q = q_3 = 1/(2\eta_3) = 1,384851\dots$. Функция $h^c(\eta)$ имеет простой нуль в точке $\eta = \eta_4 = 0,178126\dots$. Ей соответствует точка $q = q_4 = 1/(2\eta_4) = 2,806988\dots$.

Выявим особенность строения всех функций $G_\lambda(\rho, \eta)$, $2\lambda \geq -1$, в случае $\eta = \eta_4$. Так как функция $h^c(\eta)$ обращается в нуль только в точке $\eta = \eta_4$, то только в этой точке представление (9) функции $G_\lambda(\rho, \eta)$ при любых λ и ρ вырождается в равенство

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta), \quad \eta = \eta_4.$$

4.3. Сравнение двумерного и трехмерного кулоновского рассеяния.

В разд. 2 волновые функции Кулона F_λ , H_λ и G_λ полуцелого порядка определялись в полной аналогии с волновыми функциями целого порядка F_λ , H_λ и G_λ . Поэтому все формулы, приведенные в разд. 2 и 3, за исключением определений функций h^c и Θ_λ и асимптотик функции h^c , останутся справедливыми, если в них положить $\lambda = \ell$ и считать, что $\ell = 0, 1, \dots$

Докажем, что функция $G_\ell(\rho, \eta)$ является суммой

$$G_\ell(\rho, \eta) = \frac{2\eta \tilde{h}^c(\eta)}{C_0^2(\eta)} F_\ell(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\ell C_\ell(\eta)} \Theta_\ell(\rho, \eta), \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (53)$$

в которой

$$\tilde{h}^c(\eta) \equiv \operatorname{Re} \Psi(1 + i\eta) - \ln |\eta| = \operatorname{Re} \Psi(i\eta) - \ln |\eta|, \quad (54)$$

а вещественная и четная по переменной q функция Θ_ℓ определена как

$$\begin{aligned} \Theta_\ell(\rho, \eta) \equiv & \alpha \left[q^{2\ell+1} \frac{C_\ell(\eta)}{C_0(\eta)} \right]^2 x^{\ell+1} \exp(iqx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell+1+i\eta)_n}{(2\ell+2)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!} \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\ell-1} (n+\ell-p+i\eta)^{-1} - \Psi(n+1) - \Psi(2\ell+2+n) + \ln x - \frac{i}{2\eta} \right] + \\ & + \frac{i^{2\ell+1}}{2\ell+1} x^{-\ell} \exp(iqx) \sum_{n=0}^{2\ell} \frac{(-\ell+i\eta)_n}{(-2\ell)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!}, \\ & \rho = qx, \quad \eta = \alpha/(2q). \end{aligned} \quad (55)$$

Доказательство отличается от изложенного в разд. 2 вывода формул (26)–(28) только двумя этапами: вместо разбиения (31) нужно положить

$$\Psi(n+\ell+1+i\eta) = \sum_{p=0}^{n+\ell-1} \frac{1}{n+\ell-p+i\eta} + \operatorname{Re} \Psi(1+i\eta) + i \operatorname{Im} \Psi(1+i\eta),$$

а вместо суммы (32) выделить сумму

$$-i \left[\operatorname{Im} \Psi(1+i\eta) - \pi/2 + (1/2\eta) C_0^2(\eta) \right]$$

и заметить, что эта сумма равна $-i/(2\eta)$ благодаря известным равенствам [6, 7]

$$\operatorname{Im} \Psi(1+i\eta) = -\frac{1}{2\eta} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cth}(\pi\eta), \quad C_0^2(\eta) = \pi\eta \frac{\exp(-\pi\eta)}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}.$$

Сравним функции $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$, заданные формулами (27) и (54). Функция $\tilde{h}^c(\eta)$, в отличие от функции $h^c(\eta)$, не имеет ни нулей, ни локальных экстремумов. Асимптотика функции $\tilde{h}^c(\eta)$:

$$\tilde{h}^c(\eta) = \frac{1}{3} q^2 + \frac{2}{15} q^4 + \frac{1}{4} q^6, \quad \eta = \alpha/(2q), \quad q \rightarrow 0,$$

отличается от асимптотики (48) функции $h^c(\eta)$. Остальные отличия обсуждаемых функций видны из рис. 2. Зависимость функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ от их аргумента η иллюстрирует рис. 2, а. Графики функций $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$ и $\tilde{g}^c(q) \equiv \tilde{h}^c(\eta)$, изображенные на рис. 2, б, поясняют зависимость функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ от переменной $q = 1/(2\eta)$.

Выскажем три замечания. Представление (53) впервые доказано Е. Ламбертом в работе [9]. Формулы (53)–(55) в частном случае $\ell = 0$ воспроизводят соотношения, полученные в работе [8]. Предложенный выше вывод разложения (54) довольно прост.

Выявим наиболее интересную с физической точки зрения особенность двумерного кулоновского рассеяния, не имеющую аналога в трехмерном пространстве.

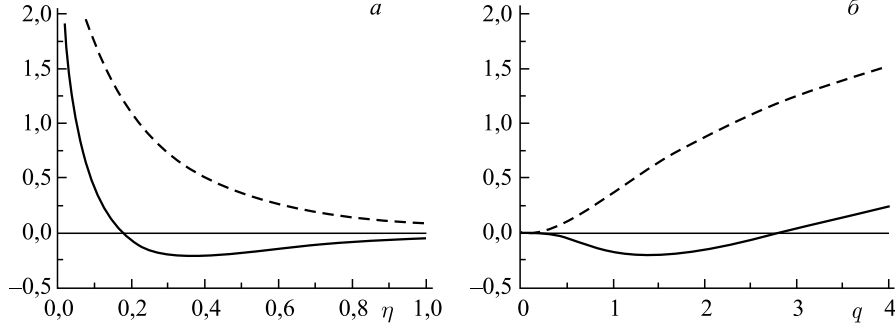


Рис. 2. Зависимость функций $h^c(\eta)$, $\tilde{h}^c(\eta)$ и $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$, $\tilde{g}^c(q) \equiv \tilde{h}^c(\eta)$, $\eta = 1/(2q)$, от их аргументов η и q : а) графики функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ — сплошная и штриховая кривые; б) графики функций $g^c(q)$ и $\tilde{g}^c(q)$ — сплошная и штриховая кривые

Для этого используем список обозначений (1) и подстановкой

$$\begin{aligned} u_\lambda(\rho, \eta) &= w_\lambda^\pm(x, q), \\ x &\equiv r/|R| = \rho/q, \\ \eta &= \alpha/(2q) \end{aligned}$$

сведем уравнение (4) к уравнению

$$\begin{aligned} [\partial_x^2 - V_\lambda^\pm(x) + q^2] w_\lambda^\pm(x; q) &= 0, \\ V_\lambda^\pm(x) &\equiv \pm \frac{1}{x} + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{x^2}, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а нижние — в случае $\alpha = -1$.

Теперь обсудим полученное уравнение (56). Это уравнение является

одномерным уравнением Шредингера для радиальной волновой функции $w_\lambda^\pm(x, q)$ квантовой частицы p_1 в состоянии $|\lambda, q\rangle$ с сохраняющимися квантовыми числами λ и q . На эту частицу воздействует эффективный потенциал $V_\lambda^\pm(x)$. Только в одном случае $\alpha = 1$ и $2\lambda = -1$ такой потенциал является знакопеременной функцией. Действительно, функция $V_{-1/2}^+(x)$, график которой изображен на рис. 3 сплошной кривой, имеет нуль в точке $x = 1/4$ и локальный максимум в точке $x = 1/2$. Следовательно, в области $x < 1/4$ потенциал $V_{-1/2}^+(x)$ является притягивающим потенциалом, а в области $x \geq 1/4$ — отталкивающим барьером. Из-за наличия такого барьера квантовая частица p_1 в рассмотренном случае $\alpha = 1$ и $2\lambda = -1$ может иметь резонансные

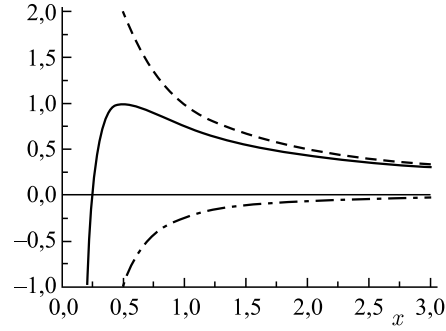


Рис. 3. Графики эффективных потенциалов $V_{-1/2}^+(x)$, $V_{1/2}^+(x)$ и $V_{-1/2}^-(x)$ — сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые

состояния. Доказательство их отсутствия или существования представляется интересным для дальнейшего построения теории двумерного кулоновского рассеяния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги выполненных исследований.

Дан вывод и анализ различных представлений (22)–(28) и (33)–(35) функций Кулона F_λ , G_λ и Θ_λ полуцелого порядка $\lambda \geq -1/2$. Получены асимптотики (41), (46) и (44), (48) кулоновской фазы рассеяния $\delta_\lambda(\eta)$ и функции $h^c(\eta)$ в пределах $|\eta| \rightarrow \infty$ и $|\eta| \rightarrow 0$. Доказано, что в пределе нулевой энергии функции Кулона F_λ , Θ_λ и G_λ связаны с функциями Бесселя соотношениями (49)–(52). Выявлены особенности фазы $\delta_{-1/2}^c$, функции h^c и потенциала $V_{-1/2}^+$.

Необходимо подчеркнуть, что все перечисленные выше формулы получены впервые, верны при любом значении квантового числа $\lambda = \pm 1/2, 3/2, \dots$ и представляются полезными для будущих исследований двумерного рассеяния квантовой частицы суперпозицией кулоновского потенциала и потенциала ядерного типа. Актуальность таких исследований обусловлена интенсивным развитием теоретической и экспериментальной физики ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
2. Меркурьев С. П. // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 289.
3. Меркурьев С. П. // ТМФ. 1977. Т. 32. С. 187.
4. Путьшев В. В. Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы. Волновые функции и функции Грина. Препринт ОИЯИ Р4-2015-17. Дубна, 2015.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2008.
6. Абарамовиц М., Стигун И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
8. Bollé D., Gesztesy F. // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1279.
9. Lambert E. // Helv. Phys. Acta. 1969. V. 42. P. 667.
10. Saar L. D., DeMille D., Krems R. V., Ye J. // New J. Phys. 2009. V. 11. P. 055049.

Получено 30 марта 2015 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 10.04.2015.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,44. Уч.-изд. л. 1,73. Тираж 270 экз. Заказ № 58513.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/