

P11-2015-58

П. Г. Акишин, А. А. Сапожников

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК

Акишин П. Г., Сапожников А. А.

P11-2015-58

Автоматическая генерация трехмерных сеток

В работе обсуждаются вопросы генерации трехмерных сеток, ориентированных на метод конечных элементов. Используется алгоритм, базирующийся на представлении расчетной области в виде объединения стандартных макроблоков с первоначальной генерацией двумерной сетки на их границе и дальнейшей генерацией трехмерной сетки отдельно в каждом блоке. Обсуждаются возможности генерации сеток с помощью созданного генератора трехмерных конечноэлементных сеток 3DFEMMesh.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2015

Akishin P. G., Sapozhnikov A. A.

P11-2015-58

Automatic Generation of Three-Dimensional Grids

This paper discusses the generation of three-dimensional meshes oriented to the finite element method. The algorithm used is based on representation of the problem domain as a combination of standard macroblocks with initial generation of a two-dimensional mesh on their boundary followed by generation of a three-dimensional mesh in each block individually. The possibility of generating meshes using the developed finite element mesh generator 3DFEMMesh is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2015

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и эксплуатации различных физических установок возникает необходимость в изучении распределения генерируемых в устройствах электромагнитных полей. Ввиду высокой стоимости магнитных систем одним из наиболее используемых инструментов для этих целей является компьютерное моделирование, для проведения которого создано большое число специализированных программ.

Моделирование магнитных систем предполагает решение большого числа проблем. Прежде всего, это выбор соответствующей математической формулировки исходной задачи, проблема дискретизации непрерывной задачи, выбор метода решения возникающих линейных и нелинейных дискретизованных задач, оценка точности полученных решений, интерпретация полученных результатов, вычисление требуемых вторичных характеристик магнитного поля и т. д. Метод конечных элементов (МКЭ) [1] и его многочисленные варианты являются наиболее удобным математическим методом как для дискретизации линейных и нелинейных уравнений, так и для описания сложной геометрии разбиваемой области.

МКЭ предполагает предварительное построение сетки, т. е. некоего топологического множества точек, связанных между собой отрезками прямых линий таким образом, что исходная область разбивается на элементы определенной формы. Для описания геометрии сложной формы в качестве элементов сетки обычно используются геометрические симплексы, т. е. треугольники в двумерном и тетраэдры в трехмерном случае. Это наиболее распространенные типы конечных элементов. Возможно построение сеток и из четырехугольников, призм, гексаэдров и др.

Основные требования, предъявляемые к разбиению области на элементы:

1. Исходная область является объединением всех элементов.
2. Мера пересечения различных элементов равна нулю.

3. Вершины одного элемента не могут быть внутренними точками грани или ребра другого, т. е. если два элемента пересекаются, то они касаются или только по целому ребру, или только по целой грани, или только по одной вершине.

В зависимости от задачи на размер элементов сетки накладываются различные требования. В подобластях, где решение меняется быстро, необходима более детальная дискретизация, и, как следствие, элементы должны быть меньше. И наоборот, внутри областей медленного изменения решения подробное разбиение приводит к неоправданно большому числу результирующих элементов, что усложняет решение итоговой дискретизованной системы уравнений. Кроме того, результирующие элементы сетки не должны вырождаться, так как вырожденные элементы влияют на аппроксимацию непрерывного решения и на сходимость итерационных методов, используемых для решения дискретизованной задачи.

При дискретизации областей с неоднородным материалом на сетку накладываются дополнительные ограничения, связанные с границами раздела сред. Эти границы, имеющие, как правило, вид кривых в двумерном случае или поверхностей в трехмерном, не должны пересекаться ребрами сетки. По сути эти ограничения означают, что каждый полученный конечный элемент сетки должен состоять только из одного материала. Границы области могут быть приближены как линиями и плоскостями, так и кривыми и поверхностями второго и более порядков. Такие границы аппроксимируются результирующими элементами с шагом, зависящим от их размера на данной участке сетки.

Несмотря на то, что построение сетки является лишь одним из подготовительных этапов численного решения многомерной математической задачи, генерация сеток в настоящее время выделилась в отдельную самостоятельную область вычислительной математики. В работе [2] дается описание наиболее известных генераторов многомерных сеток. Следует отметить, что процесс построения сетки чрезвычайно трудоемкий и предъявляет высокие требования как к субъекту, вовлеченному в данную деятельность, так и к производительности компьютеров, используемых для этих целей. Бурное развитие вычислительной техники в последние годы во многом способствовало значительному прогрессу в теории построения сеток, однако до настоящего времени существует много нерешенных вопросов, особенно в области создания генераторов трехмерных сеток.

Можно сформулировать следующие основные требования к генераторам сетки:

1. Наличие удобного интерфейса задания входных данных.
2. Максимально точная аппроксимация внешних границ областей, границ раздела сред с различным материалом и поверхностей задания дополнительных условий.
3. Отсутствие вырожденных элементов. Построенные элементы должны быть максимально приближены по форме к их правильному аналогу.
4. Возможность контроля среднего размера элементов в различных областях сетки.

5. Визуальный контроль построенной сетки. Возможность графического представления отдельных деталей, построения различных сечений.

6. Возможность построения сетки на компьютерах среднего класса.

В данной работе обсуждаются вопросы, возникающие в процессе генерации многомерных сеток, а также дается описание генератора трехмерных сеток, ориентированного на решение задачи моделирования электромагнитных полей в крупных электрофизических установках.

1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ СЕТОК

Методы построения сеток делятся на два класса: прямые и итерационные [2]. Прямые методы предполагают априорное знание формы разбиваемых областей и строят сетку за одну итерацию. В любой момент времени, зная порядковый номер узла, можно вычислить его координаты. Известны связи между этими узлами, а также форма элементов. Главными преимуществами прямых методов являются надежность и быстрота работы. Сетка строится практически «мгновенно» с минимумом затрат и с минимальным риском ошибки. Следует также отметить, что применение прямых методов позволяет получать в итоге структурированные сетки. Это означает, что по индексам узла можно определить всех его соседей, а также вычислить координаты. Это важное свойство позволяет существенно экономить компьютерные ресурсы. Главным недостатком является возможность применения только для областей определенной геометрической конфигурации. Прямые методы можно разделить на три подкласса: методы, базирующиеся на основе деления, на основе шаблонов и на основе отображения. В силу ограниченности применения прямых методов использование всех трех вместе позволяет существенно расширить потенциал метода. Более подробно о прямых методах написано в [2].

Итерационные методы строят сетку последовательно, опираясь на каждом этапе на то, что сделано на предыдущем. Алгоритмам не требуется информация о разбиваемой области, что делает их более универсальными. На каждом шаге добавляется один или несколько элементов, причем изначально не известны ни координаты узлов, ни топология сетки. Координаты узлов и топология могут меняться прямо в процессе построения. Главным преимуществом итерационных методов является то, что они работают с областями достаточно произвольной геометрической формы. Из недостатков следует отметить ресурсоемкость, существенно меньшую надежность и скорость работы, сложность реализации по сравнению с прямыми методами. Итерационные методы из-за своей универсальности получили наибольшее развитие. Разработано несколько различных подходов, которые можно разделить на три подкласса: методы граничной коррекции, методы исчерпывания и ме-

тоды на основе критерия Делоне [3]. Более подробно об итерационных методах написано в [2].

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА СЕТКИ

Очевидно, что форма и размер элементов разбиения явно влияют на точность и сходимость численных методов, применяемых для решения математической задачи с использованием построенной сетки. Если на размер элемента еще можно влиять в процессе построения сетки, то с формой возникают значительные сложности, вызванные требованиями, предъявляемыми МКЭ к топологии разбиения. Следует отметить, что чем более элемент походит на свой правильный аналог, тем лучше его форма. Однако даже в двумерном случае разбить некоторую плоскую область на правильные элементы представляется возможным только в исключительных случаях, например, когда сама область является правильным элементом или составлена из них. Что уж говорить о трехмерном случае, если даже правильный тетраэдр в общем случае нельзя разбить на правильные тетраэдры. Поэтому задача генерации сетки формулируется как разбиение заданной области на элементы, обладающие наилучшими свойствами.

В связи с этим возникает проблема формализованной оценки этих свойств элементов. В настоящее время предложено множество способов этой оценки [4]. Ниже приведены основные критерии для треугольников:

- отношение длины наибольшего ребра к радиусу вписанной окружности;
- отношение длин наибольшего и наименьшего ребер;
- отношение наименьшего и наибольшего углов.

Схожие критерии существуют и для тетраэдров:

- отношение радиуса описанной сферы к длине наибольшего ребра;
- отношение длин наибольшего и наименьшего ребер;
- отношение наименьшего и наибольшего телесных углов.

Ввиду того, что оптимальные значения различных критериев отличаются, предлагается ввести нормированные критерии [2]. Нормализация критериев обеспечивается отношением полученного значения у рассматриваемого элемента к значению этого же критерия для правильного элемента. Таким образом, область значений любого критерия для произвольного элемента будет лежать на отрезке $[0; 1]$. Наличие элемента со значением критерия, равным нулю, означает, что сетка некорректная, так как данный элемент будет вырожденным. Единица соответствует правильному элементу.

Эти оценки различаются по релевантности. Одни учитывают только наличие слишком больших тупых углов, другие — только наличие слишком острых, и т. д. В связи с этим как основной критерий качества элемента предлагается использовать среднее арифметическое значение всех критериев Q_{avg} .

В качестве итогового критерия триангуляции области можно использовать следующие критерии:

1. Среднее арифметическое по всем элементам сетки: $Q_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Q_{ar}]$.
2. Среднее гармоническое по всем элементам сетки: $Q_g = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [1/Q_{harm}]}$.
3. Минимальное значение критерия по всем элементам сетки: $Q_m = \text{MIN}_{i=1}^N [Q_{min}]$.

Особенностью среднего гармонического, как общего показателя качества модели, является повышенная чувствительность к появлению отдельных малых значений [4]. Наличие в результирующей триангуляции элементов с очень малыми (менее 10 градусов) или очень большими (более 170 градусов) углами приводит к ухудшению обусловленности матрицы системы, что, в свою очередь, влияет на результат и даже на сходимость численного метода, применяемого на этой сетке. По этой причине малое значение критерия будет сигнализировать о наличии ошибки в алгоритме разбиения области.

3. АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК

В данном разделе описываются основные идеи, положенные в основу программного комплекса 3DFEMMesh генерации трехмерных сеток.

Предполагается, что элементы разбиения отвечают всем требованиям, предъявляемым МКЭ. Генерация сетки начинается с задания входной геометрии. Входная геометрия задается как объединение выпуклых макроблоков, также отвечающих требованиям МКЭ. В качестве исходных макроблоков могут использоваться как гексаэдры, треугольные призмы, пирамиды, тетраэдры, так и их изопараметрические аналоги. В каждом макроблоке задается максимальный размер ребра элемента разбиения. Стартовые элементы снабжены индикаторами, характеризующими свойства подобласти, к которой принадлежат макроблоки.

Полученную область надо измельчить, причем так, чтобы требования МКЭ не нарушались. Для контроля размеров результирующих конечных элементов используется «шаг разбиения» — параметр, равный максимальной длине ребра результирующего элемента. Ввод этого параметра возможен для следующих объектов (приоритет ввода сверху вниз):

- для ребра;
- для грани;
- для элемента;
- глобально для всей сетки.

Процедура функции сгущения сетки в определенной области реализована с помощью введения коэффициента сгущения для узлов сетки. По умолчанию он равен 1. Если у узла он равен 0,5, то размер элемента сетки вблизи данного узла будет вдвое меньше шага разбиения, определенного в этой области.

Процесс построения трехмерной сетки осуществляется в три этапа. На каждом этапе разбиения алгоритм опирается на то, что было построено на предыдущем. На первом этапе производится разбиение всех ребер стартовых макроблоков. На втором — разбиение всех граней. На третьем этапе проводится разбиение каждого макроблока отдельно с учетом уже построенного разбиения его границы.

Рассмотрим подробнее алгоритмы генерации сетки на каждом этапе.

На первом шаге требуется разбить каждое ребро сетки согласно входным параметрам разбиения. Для простоты рассмотрим алгоритм разбиения отрезка $[0; 1]$ с шагом h и коэффициентами сгущения $K_L \leq K_R$. Здесь K_L соответствует точке 0, а K_R точке 1. Для начала определим количество отрезков — N . При $K_L = K_R = 1$ это будет $N_e = \max(1, [1/h])$. Если коэффициенты отличны от единицы, то так как $K_L \leq K_R$, минимальное число отрезков будет $N_{\min} = \max(1, [1/(h K_R)])$, а максимальное $N_{\max} = \max(1, [1/(h K_L)])$. Сумма длин всех отрезков $\{S_i\}$ равна единице:

$$\sum_{i=1}^N S_i = 1. \quad (1)$$

Из предположения линейного изменения коэффициента сгущения вдоль отрезка следует, что размеры отрезков разбиения являются членами арифметической прогрессии:

$$2S_i = S_{i-1} + S_{i+1}. \quad (2)$$

Получаем

$$S_i = S_1 + d(i-1), \quad (3)$$

где S_i — размер i -го отрезка разбиения, а d — шаг изменения длин соседних отрезков. Учитывая, что

$$S_1 = K_L h, \quad S_N = K_R h, \quad (4)$$

из (1)–(3) имеем

$$N h (K_L + K_R) = 2. \quad (5)$$

Из (4), (5) вычисляем число отрезков и их длину.

С помощью функций форм разбиение единичного отрезка отображается в разбиение требуемого ребра сетки. При добавлении очередной точки ей также присваивается расчетный коэффициент сгущения, который вычисляется по формуле $K_j = K_L + (K_R - K_L) D$, где S — расстояние от начальной точки ребра до расчетной.

Данный алгоритм характеризуется тем, что в окрестности левого узла сетки коэффициент сгущения близок к значению, заданному в нем. По мере приближения узла сетки к правому концу интервала коэффициент заполнения стремится к заданному значению сгущения в правом конце интервала (см. рис. 1).



Рис. 1. Разбиение ребра сетки со сгущением

Везде далее по тексту при упоминании разбиения отрезка на N частей будет подразумеваться построение вышеописанного разбиения со сгущением.

На втором этапе генерации производится разбиение граней. В качестве двумерных элементов рассматриваются треугольники, четырехугольники, а также их изопараметрические аналоги. На предыдущем этапе уже было получено разбиение ребер с учетом сгущения. Рассмотрим задачу разбиения прямоугольника на треугольники и четырехугольники с заданным числом разбиений на сторонах N_1, N_2, N_3, N_4 .

Допустим, без ограничения общности, что $N_1 \leq N_2, N_1 \leq N_3, N_1 \leq N_4$. Тогда возможны два варианта:

1) $N_1 = N_3$.

Если $N_2 = N_4$, то такой прямоугольник разбивается последовательным соединением противоположных точек разбиения.

Допустим, что $N_2 < N_4$. «Отрезав» от четырехугольника часть так, как показано на рис. 2, получим четырехугольник с разбиением на сторонах: $\llbracket N_1 - 1, N_2 + K, N_3 - 1, N_4 \rrbracket$, где K на первом этапе равно 1.

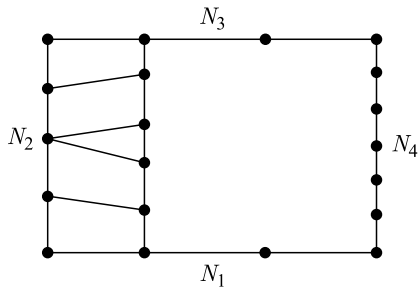


Рис. 2. Разбиение прямоугольника $N_2 < N_4$

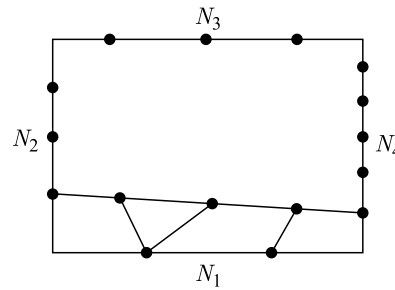


Рис. 3. Разбиение прямоугольника $N_1 < N_3$

2) $N_1 < N_3$.

«Отрезав» от четырехугольника часть так, как показано на рис. 3, получим четырехугольник с разбиением на сторонах $\llbracket N_1 + K, N_2 - 1, N_3, N_4 - 1 \rrbracket$, где K на первом этапе равно 1.

При рекурсивном выполнении этого метода получится прямоугольник с разбиениями N_1, N_2, N_3, N_4 , где $N_1 = N_3, N_2 = N_4$ (рис. 4). Если же

четыреугольник с равным разбиением на противоположных сторонах не получается, то увеличиваем переменную K на единицу. При таком подходе получается более равномерное разбиение. Неудовлетворительные четырехугольники (с углом больше 120 градусов) разбиваются на два треугольника по короткой диагонали. В случае криволинейных элементов возможно появление скрученных четырехугольников, поэтому четырехугольники проверяются на принадлежность своих вершин одной плоскости.

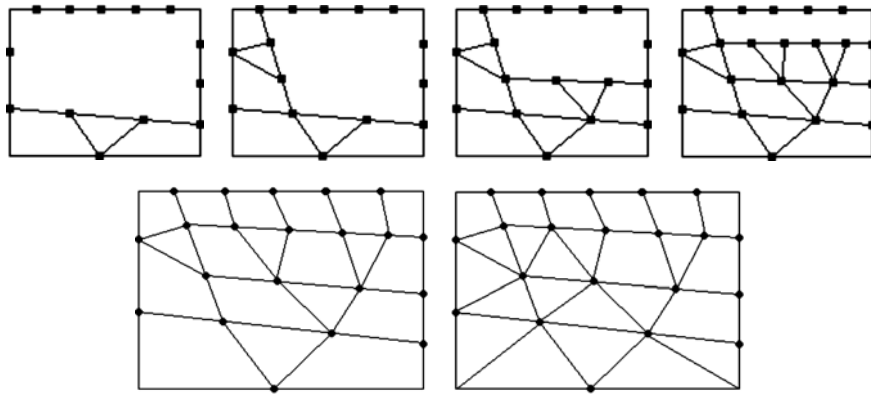


Рис. 4. Алгоритм разбиения четырехугольников

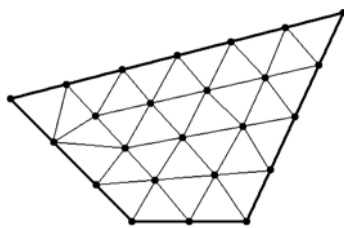


Рис. 5. Разбиение четырехугольника с пропорциональными длинами сторон

В программе также есть возможность принудительного построения треугольной сетки. В этом случае все четырехугольники будут разбиты на треугольники. Пример такого разбиения приведен на рис. 5. Разбиение на сторонах такое же, как в рассмотренном выше примере, но все четырехугольники разбиты на треугольники. Как правило, количество разбиений на сторонах прямо пропорционально длинам сторон.

Алгоритм разбиения треугольника аналогичен (рис. 6). На рис. 7 приведен пример разбиения четырехугольника со сгущением.

По окончании второго этапа генерации сетки было получено разбиение всех граней всех входных макроэлементов (рис. 8). На третьем этапе производится разбиение области на объемные элементы. В качестве базовых трехмерных элементов рассматриваются гексаэдры, треугольные призмы и тетраэдры, а также их изопараметрические аналоги. Алгоритм разбиения на объемные элементы для всех типов макро-

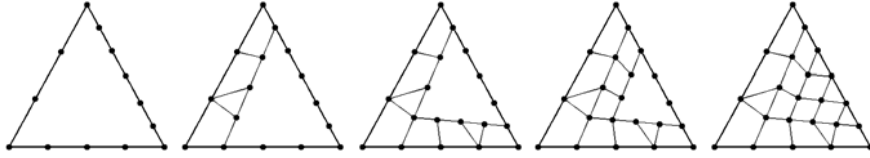


Рис. 6. Алгоритм разбиения треугольников

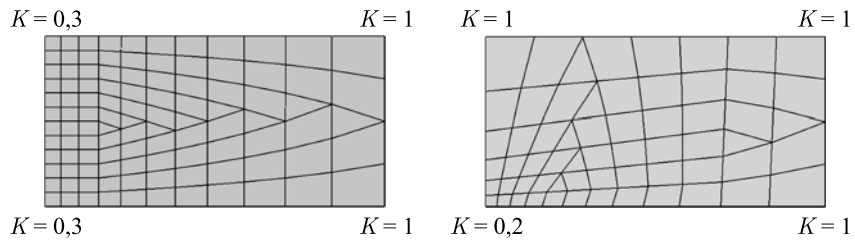


Рис. 7. Алгоритм разбиения четырехугольника со сжатием

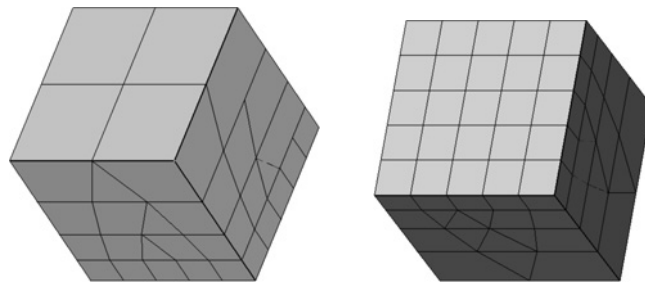


Рис. 8. Разбиение гексаэдра на грани после второго этапа

элементов одинаков. Ниже приводится пример работы алгоритма разбиения гексаэдра (куба) с существующим разбиением граней.

Прежде всего определяется грань, у которой суммарное число разбиений на сторонах минимально. Если таких граней несколько, берется та из них, число разбиений на перпендикулярных ребрах к которой максимально. Далее «отрезается» от куба эта грань по линии ближайшего разбиения (рис. 9). «Плоскость» отрезания также разбивается уже известным алгоритмом со второго этапа. Кавычки обозначают, что в общем случае мы имеем дело не с плоскостью, а с некой ломаной линией. В результате исходный гексаэдр распадается на два «гексаэдра», определенных наборами ломаных линий.

Алгоритм построения разбиения внутренней грани гексаэдра аналогичен алгоритму построения разбиения четырехугольника (рис. 10). Единственное отличие заключается в том, что получившиеся четырехугольники могут не

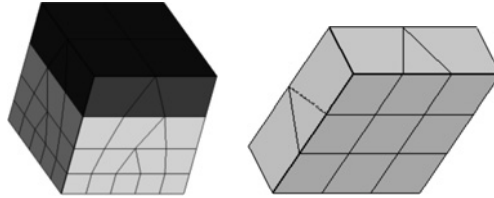


Рис. 9. Разбиение гексаэдра на части

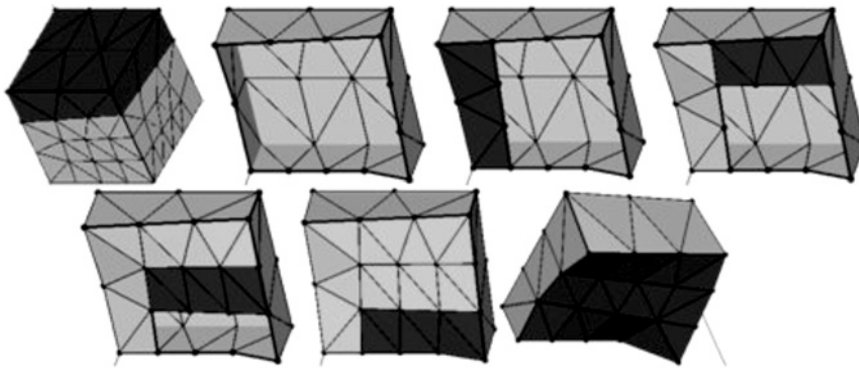


Рис. 10. Построение внутренней грани гексаэдра

лежать в одной плоскости. Такие четырехугольники разбиваются на два треугольника по короткой диагонали.

Итерационно запуская данный процесс для каждого из них, получаем требуемое разбиение. Процесс следует продолжать до тех пор, пока в итоге не получится элемент с нулевым разбиением на гранях. В результате «отрезания» могут получаться «гексаэдры», «треугольные призмы» и «тетраэдры». Для каждого элемента запускается соответствующая процедура дробления (рис. 11–13).

Следует отметить, что в процессе дробления могут появиться элементы, от которых невозможно уже ничего «отрезать», но они не являются результирующими (рис. 14).

Для каждого такого элемента производятся дополнительные преобразования (рис. 15). Таких нестандартных элементов существует немного. Возможные виды преобразования:

- разбиение одной или нескольких граней на треугольники;
- взаимный «флип» двух соседних треугольников грани;
- добавление внутренней точки.

В случае необходимости производится дополнительное разбиение двумерных граней для уже построенных ранее правильных элементов, после чего

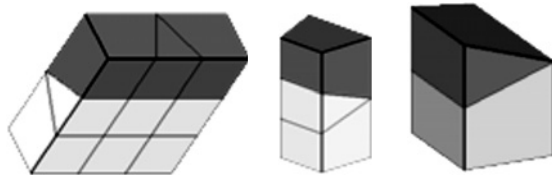


Рис. 11. Разбиение «отрезанной» части

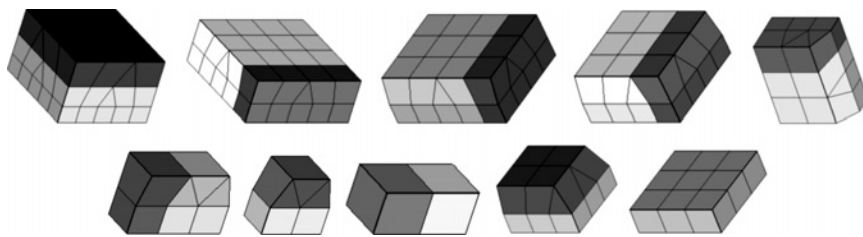


Рис. 12. Разбиение «основной» части

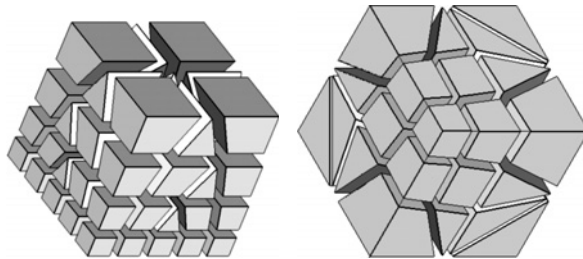


Рис. 13. Алгоритм разбиения со сгущением

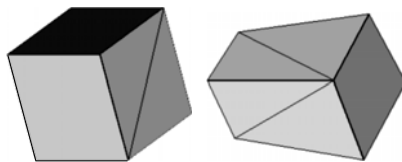


Рис. 14. Примеры элементов, не являющихся результирующими

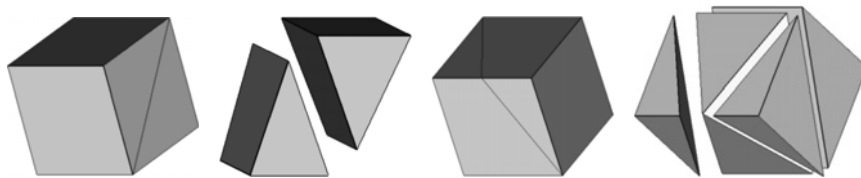


Рис. 15. Дополнительные преобразования элементов

процесс трехмерного разбиения повторяется. При этом в качестве начальных макроблоков берутся уже построенные элементы с их новым разбиением граней. Следует отметить, что повторное трехмерное разбиение необходимо будет сделать для небольшого числа элементов. Итерационный процесс трехмерного разбиения быстро схлопывается.

4. ГЕНЕРАТОР ТРЕХМЕРНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

На базе алгоритмов, изложенных выше, был создан генератор трехмерных адаптивных сеток 3DFEMMesh. Для работы с генератором необходимо задать геометрию области. Ввод может осуществляться как в текстовой моде, так и графически. Первоначально задаются вершины будущих макроэлементов, которые объединяются в группы для массовой обработки. Точки из одной группы можно копировать с их геометрической трансформацией. Допускается сдвиг на постоянный вектор, поворот относительно прямой, отражение относительно плоскости (рис. 16). Можно устанавливать параметр сгущения разбиения в окрестности точки. Все заданные точки выводятся на экран.

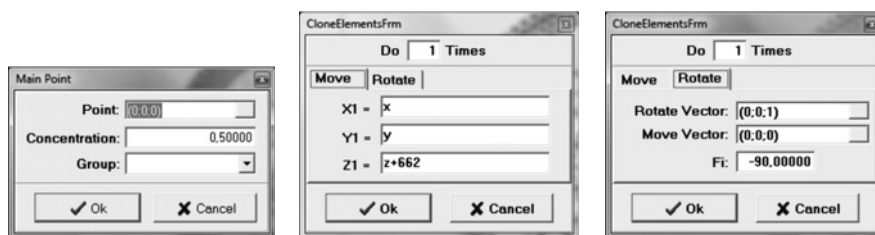


Рис. 16. Задание вершин и их геометрической трансформации

Для задания ребер макроэлементов введенные вершины необходимо объединить. Это возможно сделать как напрямую, введя номера вершин, так и курсором, маркируя начальную и конечную вершины ребра. Если ребро криволинейное, то указывается его средняя точка. Для каждого ребра можно установить его локальные параметры разбиения (рис. 17). Ребра, как и точки, можно копировать с их дальнейшей геометрической трансформацией. При этом вершины будут также копироваться. Ребро можно разделить на несколько. При этом будут добавляться новые вершины. С учетом уже построенных граней для каждого микроблока производится автоматический поиск граней. Ребра объединяются в треугольники и четырехугольники.

Существует возможность копирования макроэлементов с их геометрической трансформацией. Для каждого макроблока задается средний размер элементов разбиения в нем. После задания начальной геометрии производится

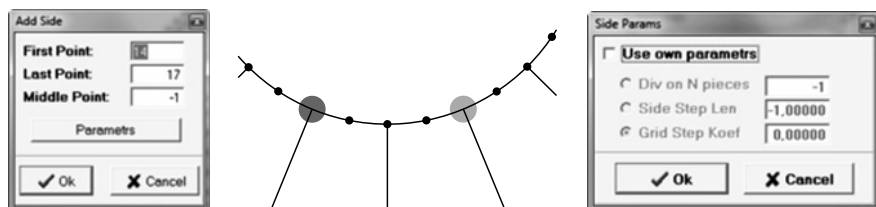


Рис. 17. Задание ребра и его локальных параметров

разбиение ребер и граней по алгоритмам, изложенным ранее. На последнем этапе производится дробление полученных макроэлементов на тетраэдры.

5. РАСЧЕТ КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА СЕТКИ

После генерации сетка выводится на экран. Для анализа результатов работы генератора изображение можно вращать во всех направлениях, приближать и удалять, скрывать и отображать элементы, строить пересечение сетки плоскостью. Для визуальной оценки качества разбиения существует возможность пропорционального уменьшения размеров конечных элементов (рис. 18).

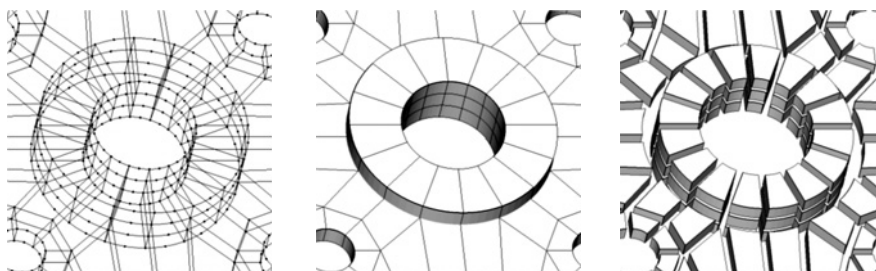


Рис. 18. Задание начальной геометрии

Если в двумерном случае для анализа работы алгоритма достаточно вывести результаты генерации на экран для визуальной оценки, то в трехмерном случае сложно оценить качество разбиения даже одного макроэлемента, не говоря уже обо всей сетке. Поэтому после генерации трехмерной сетки производится расчет критериев качества элементов разбиения, описанных выше. Вычисляется среднее арифметическое, среднее гармоническое и минимальные значения критериев качества элементов на всей сетке.

Ниже приведены критерии качества разбиения единичного куба на шесть тетраэдров:

- $Q_{\min} = 0,4928$;
- $Q_{\text{ar}} = 0,5849$;
- $Q_{\text{harm}} = 0,5785$.

Для обнаружения элементов плохой формы используется метод, предложенный Л. Дарбек [5]. Программа позволяет выводить на экран только те элементы, критерий качества которых меньше заданного внешнего параметра. Максимальное значение параметра означает отображение всех элементов сетки. В процессе уменьшения его значения качественные элементы сетки начинают пропадать. Минимальное значение соответствует самому плохому элементу сетки. При плавном уменьшении параметра хорошие элементы будут «испаряться», позволяя увидеть элементы с более низким качеством. Отсюда и название метода — «evaporation», т. е. «испарение». На рис. 19 приведен пример «испарения» элементов для различных значений параметра.

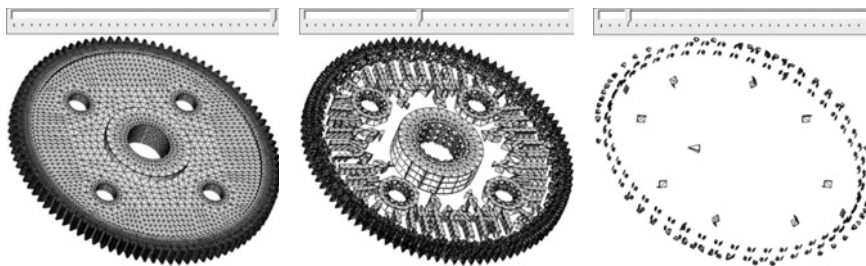


Рис. 19. Процесс «испарения» элементов при изменении параметра качества

В качестве примера работы генератора приведем дипольный магнит из эксперимента СВМ (GSI, Дармштадт, Германия) (рис. 20). Разбиение магнита проводилось с учетом симметрии.

Восьмая часть магнита была разбита на 1398 тетраэдров. Качество полученной сетки:

- $Q_{\min} = 0,1235$;
- $Q_{\text{ar}} = 0,3998$;
- $Q_{\text{harm}} = 0,3234$.

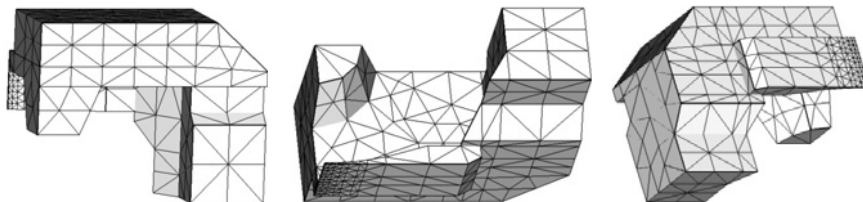


Рис. 20. Разбиение восьмой части дипольного магнита эксперимента СВМ

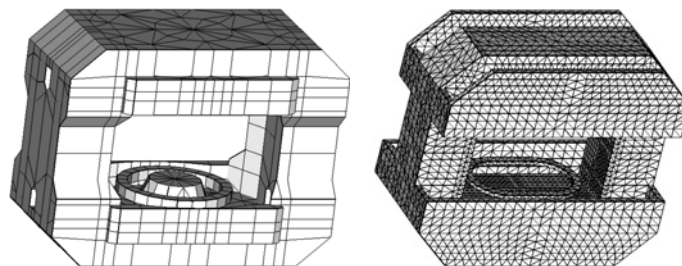


Рис. 21. Дипольный магнит эксперимента СВМ и его компьютерная модель

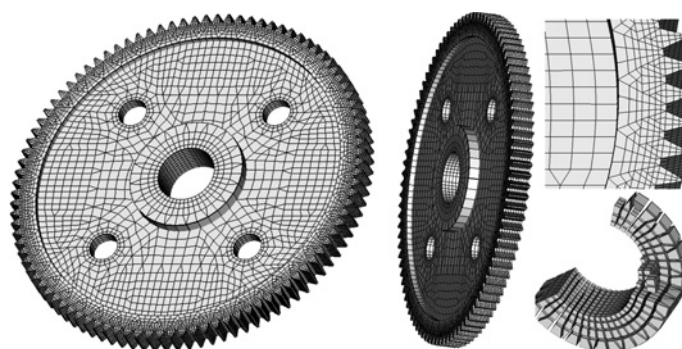


Рис. 22. Примеры работы генератора по разбиению объектов сложной формы

На рис. 21 приведен общий вид магнита и разбиение на тетраэдры его полной модели.

Следует отметить, что вышеописанный алгоритм в качестве элементов разбиения позволяет использовать шестигранники, треугольные призмы и тетраэдры. Элементы перечислены в порядке убывания приоритета использования. Однако в данном случае магнит был разбит только на тетраэдры для дальнейшего проведения расчетов магнитного поля в рамках метода объемных интегральных уравнений [6]. На рис. 22 приведены примеры работы генератора по разбиению объектов сложной формы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании МКЭ для моделирования задач математической физики одной из основных проблем является построение трехмерных адаптивных сеток. В работе [7] дается описание генератора трехмерных сеток, основанного на идее задания двумерной сетки на базовой гиперплоскости с дальнейшим продлением ее в пространство с сохранением топологии (MAPPING).

В данной работе описан алгоритм, базирующийся на представлении расчетной области в виде объединения стандартных макроблоков с дальнейшей генерацией двумерных сеток на их границах и построением трехмерных сеток отдельно в каждом макроблоке. На базе изложенной методики создан генератор трехмерных ориентированных на МКЭ адаптивных сеток 3DFEMMesh. Программа имеет графический интерфейс для ввода данных и визуальной оценки качества разбиения, вычисляет ряд критериев оценки качества полученной триангуляции. Данный генератор использовался для моделирования дипольного магнита эксперимента CBM (GSI, Дармштадт). Генератор 3DFEMMesh включен в библиотеку программ JINRLIB [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zienkiewicz O. C.* The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill. London, 1971.
2. *Щеглов И. А.* Дискретизация сложных двумерных и трехмерных областей для решения задач математического моделирования: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 16 с.
3. *Скворцов А. В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 2002. 128 с.
4. *Доброскок В. Л., Абдурайимов Л. Н., Чернышов С. И.* Критерии качества триангуляции 3D-моделей промышленных изделий // Сб. научных работ НТУ «ХПИ». Харьков, Украина, 2011. Вып. 6. С. 245–254.
5. *Durbeck L.* Evaporation: A Technique for Visualizing Mesh Quality // 8th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, South Lake Tahoe, 1999.
6. *Акишин П. Г., Сапожников А. А.* Метод объемных интегральных уравнений в задачах магнитостатики // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». 2014. № 2. С. 185–190.
7. *Akishin P. G., Sapozhnikov A. A.* Three-Dimensional Mesh-Generator for Finite Element Method Applications // Scientific report 2006–2007. LIT, JINR. Dubna, 2007. P. 215–219.
8. <http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/3dfemmesh/>.

Получено 9 июля 2015 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 02.09.2015.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,18. Уч.-изд. л. 1,47. Тираж 245 экз. Заказ № 58622.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/