

P4-2015-76

В. В. Пупышев¹

ДВУМЕРНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ
КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ.
НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

¹ E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В.

P4-2015-76

Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы.
Низкоэнергетические асимптотики

Считается, что заряженная квантовая частица движется в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и рассеивается неподвижным кулоновским центром, находящимся в той же плоскости. Выведены и исследованы разложения волновой функции и всех радиальных волновых функций такой частицы по целым степеням волнового числа и функциям Бесселя вещественного порядка. Доказано, что конечные суммы таких разложений являются асимптотиками в пределе низких энергий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2015

Pupyshev V. V.

P4-2015-76

Two-Dimensional Coulomb Scattering of a Quantum Particle.
Low-Energy Asymptotics

By assumption, a charged quantum particle moves in the two-dimensional plane of the three-dimensional configuration space and is scattered by a fixed Coulomb center lying in the same plane. The expansions of the wave-functions and all radial wave-functions of this particle over integer powers of the wave number and the Bessel functions of real order are derived. It is proven that the finite sums of these expansions are the asymptotics of the wave-functions in the low-energy limit.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2015

ВВЕДЕНИЕ

В современной теории рассеяния [1] принято использовать следующие термины: «двумерный атом водорода» и «двумерное резерфордское рассеяние». Первый из них означает связанное состояние заряженной квантовой частицы p_1 , взаимодействующей только в двумерной плоскости \mathcal{P} с неподвижным кулоновским силовым центром O посредством потенциала $z_1 Z/r$, где по определению z_1 и Z — противоположные по знаку кулоновские заряды частицы и силового центра, а r — расстояние между ними в плоскости \mathcal{P} . Под вторым термином подразумевается кулоновское рассеяние частицы p_1 силовым O в той же плоскости \mathcal{P} , причем не только в случае кулоновского притяжения ($z_1 Z < 0$), но и в случае кулоновского отталкивания ($z_1 Z > 0$).

Двумерный атом водорода изучен довольно подробно. Известно точное и исчерпывающее решение задач на связанные состояния для двумерных уравнений Шрёдингера [2, 3] и Дирака [4, 5] с потенциалом $z_1 Z/r$. Для всего спектра нерелятивистских связанных состояний в работе [3] вычислены дипольные матричные элементы; выведены формулы, определяющие вероятность одно- и двухфотонных переходов между такими состояниями; исследованы сдвиги собственных значений, порожденные включением постоянного электрического поля, и выявлено сверхтонкое расщепление собственных значений. Анализ спектра двумерного атома водорода в сильном магнитном поле выполнен в работе [6].

Двумерное резерфордское рассеяние исследовано не столь детально, как двумерный атом водорода. При любой положительной энергии E квантовой частицы известны точные регулярные решения Ψ^c и $\tilde{\Psi}^c$ задач рассеяния для двумерных уравнений Шрёдингера [7, 8] и Дирака [9] с потенциалом $z_1 Z/r$. Аналитические продолжения таких решений в область комплексных значений энергии E неизвестны. Кулоновская функция Грина G^c , соответствующая нерелятивистской волновой функции Ψ^c рассеяния квантовой частицы p_1 , исследовалась в работах [10] и [11]. Функцию G^c в импульсном пространстве удалось выразить через элементарные функции [10], а в координатном пространстве — в виде однократного интеграла [11]. Оценки

функции G^c снизу и сверху и ее представление в координатном пространстве через известные специальные функции до сих пор не выведены.

Давно известно [2], что двумерное уравнение Шрёдингера с потенциалом $z_1 Z/r$ допускает разделение в полярных координатах (r, φ) и проецированием на угловой базис $\cos m\varphi$, $m = 0, 1, \dots$, сводится к счетной совокупности незацепляющихся одномерных уравнений Шрёдингера на полупрямой $r > 0$. Анализ строения регулярного и нерегулярного решений F_λ и G_λ , $\lambda \equiv m - 1/2$, таких уравнений дан в работе [12].

Низкоэнергетические ($E \rightarrow 0+$) асимптотики волновых функций Ψ^c , F_λ и G_λ еще не исследовались. Главная цель настоящей работы — построение и исследование таких асимптотик в области $0 \leq r < \infty$. В разд. 1 перечисляются основные определения и обозначения. Низкоэнергетические асимптотики регулярных и нерегулярных волновых функций Кулона F_λ и G_λ полуцелого порядка выводятся в разд. 2 и 3. Разд. 4 посвящен построению низкоэнергетической асимптотики волновой функции Ψ^c . В заключении перечисляются основные результаты.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть \hbar — постоянная Планка, m_1 — масса квантовой частицы p_1 , а r, φ — ее полярные координаты в плоскости \mathcal{P} . Положим

$$k = \sqrt{\frac{2m_1 E}{\hbar^2}}, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 z_1 Z}, \quad \alpha \equiv \text{sign } R, \quad \eta \equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q};$$

$$x \equiv \frac{r}{|R|}, \quad \rho \equiv kr = qx, \quad v \equiv \sqrt{8|\eta|\rho} = 2\sqrt{x}, \quad w \equiv v \sin(\varphi/2) = 2\sqrt{x} \sin(\varphi/2).$$

Здесь и далее k и q — размерное и безразмерное волновые числа частицы p_1 ; η — параметр Зоммерфельда; x, ρ, v и w — безразмерные неотрицательные переменные.

Как пояснялось в работах [11, 12], волновая функция $\Psi^c(\rho, \varphi, \eta)$ двумерного кулоновского рассеяния частицы p_1 в плоскости \mathcal{P} подчиняется уравнению Шрёдингера

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_r + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right) \Psi^c(\rho, \varphi, \eta) = 0, \quad (1)$$

которое подстановкой

$$\Psi^c(\rho, \varphi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ u_{-1/2}(\rho, \eta) + 2 \sum_{2\lambda=1}^{\infty} u_\lambda(\rho, \eta) \cos[(2\lambda+1)\varphi/2] \right\} \quad (2)$$

сводится к счетной ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) последовательности не зацепляющихся друг с другом уравнений Кулона с полужелым индексом λ :

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

Для уравнений Шрёдингера и Кулона (1) и (3) пределом нулевой энергии назовем предел $E \rightarrow 0+$ при фиксированных значениях параметра R , $R \neq 0$, и порядка $\lambda \geq -1/2$. В таком пределе оба волновых числа k и q сходятся к нулю справа, а модуль параметра Зоммерфельда η неограниченно возрастает. Под низкоэнергетической асимптотикой исследуемой кулоновской функции подразумеваем ее асимптотику в пределе нулевой энергии рассеяния, понимаемом в вышеуказанном смысле.

Напомним определение ряда Маклорена [13]. Пусть функция $T(q)$ имеет непрерывные производные порядка $p = 0, 1, \dots, n$ на конечном отрезке $[0, b]$, где $0 < b < \infty$. Тогда ее можно представить в виде ряда Тейлора с центром в точке $q = 0$:

$$T(q) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{q^p}{p!} \partial_q^p T(q)|_{q=0} + R_n(q, t), \quad R_n(q, t) = \frac{q^n}{n!} \partial_q^n T(q)|_{q=t},$$

$$q \in [0, b], \quad t \in (0, b).$$

Такой ряд называется рядом Маклорена. В пределе $q \rightarrow 0$ его остаточное слагаемое $R_n(q, t)$ убывает как $O(q^n)$. Если $T(q) = T(-q)$, $q \in [0, b]$, то функция $T(q)$ называется четной, а ее ряд Маклорена содержит только четные степени аргумента q .

Будем использовать известный в теории рядов [14] признак равномерной сходимости бесконечного ряда S : если ряд \tilde{S} , все слагаемые которого положительные, превосходит модуль ряда S и сходится, то ряд S сходится равномерно. Ряд \tilde{S} принято называть мажорантой ряда S .

Ключевым для наших построений окажется известный асимптотический метод [15] построения решения дифференциального уравнения второго порядка в виде ряда по целым степеням параметра перед функцией, удовлетворяющей этому уравнению.

Придется различать два случая: случай кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$) и случай кулоновского притяжения ($\alpha = -1$). Для краткости используем символы и формулы с верхними и нижними знаками «плюс» и (или) «минус», подразумевая, что в таких формулах все верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а все нижние — в случае $\alpha = -1$. Например, формула

$$A^\pm = a^\pm + \left\{ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \right\}$$

означает, что в случае $\alpha = 1$ верно равенство $A^+ = a^+ + b$, а в случае $\alpha = -1$ — равенство $A^- = a^- + c$.

2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

В настоящем разделе регулярные функции Кулона F_λ считаются функциями переменных v и q . В п. 2.1 приводятся известные представления [12] этих функций через функции Куммера [16–18]. П. 2.2 содержит вывод формул дифференцирования функций Куммера по переменной q . В п. 2.3 эти формулы применяются, для того чтобы представить функции F_λ в виде рядов Маклорена по этой же переменной. Эти конечные ряды позволяют далее определить строение искомым представлений функций F_λ в виде бесконечных рядов, содержащих заранее неизвестные числовые коэффициенты b_{ns} , функции Бесселя [16–18] первого рода $J_\mu(v)$ и $I_\mu(v)$ и целые степени переменных v и q . В п. 2.4 для коэффициентов b_{ns} выводится и исследуется цепочка рекуррентных уравнений. Свойства этих коэффициентов используются в п. 2.5 для доказательства и анализа сходимости полученных разложений функций F_λ по функциям Бесселя.

2.1. Представления и свойства регулярных функций Кулона. Регулярные волновые функции Кулона F_λ полуцелого порядка λ подробно обсуждались в работе [12]. Напомним определение функций F_λ и приведем некоторые формулы из этой работы.

Регулярной волновой функцией Кулона $F_\lambda(\rho, \eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ называется вещественное решение уравнения (3), обладающее асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = O(\rho^{\lambda+1}), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и асимптотикой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = \sin[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

где $\delta_\lambda^c(\eta)$ — кулоновская фаза, равная аргументу гамма-функции $\Gamma(1 + \lambda + i\eta)$.

Функция F_λ выражается через функцию Куммера Φ формулой

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2, -2i\rho). \quad (4)$$

Эта формула содержит кулоновский множитель

$$C_\lambda(\eta) = 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} \exp(-\pi\eta/2), \quad (5)$$

и после замены функции Φ ее разложением в степенной ряд становится равенством

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1+i\eta)_n}{(2\lambda+2)_n} \frac{(-2i\rho)^n}{n!}. \quad (6)$$

Из этого равенства следует представление

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta)(2\lambda+1)! \frac{v}{2} f_\lambda^\pm(v, q), \quad (7)$$

в котором

$$f_\lambda^\pm(v, q) \equiv \exp\left(iq \frac{v^2}{4}\right) \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1 \pm i/(2q))_n}{\Gamma(\nu+n+1) n!} \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n, \quad \nu \equiv 2\lambda+1. \quad (8)$$

В отличие от функции F_λ функция f_λ^\pm является четной функцией волнового числа q . Это свойство окажется особенно важным в п. 2.3. и 2.4.

2.2. Ряды Маклорена для функций Куммера. Согласно представлению (4), (5) волновая функция F_λ является произведением, один из множителей которого — функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$. Ее параметр $a = \lambda+1+i\eta$, где $\eta = \alpha/(2q)$, и аргумент $\xi = -i2\rho = -i2qx$ зависят от волнового числа q , а параметр $c = 2\lambda+2$ не зависит от этого числа. В следующем пункте потребуются производные $\partial_q^n \Phi(a, c; \xi)$, $n = 0, 1, \dots$, функции $\Phi(a, c; \xi)$ по волновому числу q в точке $q = 0$. Такие производные нетрудно вычислить, если найдены производные этой же функции $\Phi(a, c; \xi)$ по параметру a и по аргументу ξ . В теории специальных функций [16] известны формулы дифференцирования функции Куммера по аргументу, но формулы дифференцирования по параметрам неизвестны. Поэтому для вычисления производных $\partial_q^n \Phi(a, c; \xi)$, $n = 0, 1, \dots$, придется предложить довольно простой способ. Опишем его.

Представим исследуемую функцию Куммера в виде суммы

$$\Phi(\lambda+1+i\alpha|\eta|, 2\lambda+2, -2i\rho) = \nu! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1+i\alpha/(2q))_n}{\Gamma(\nu+n+1) n!} \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n. \quad (9)$$

Каждое ее слагаемое содержит произведение двух множителей, зависящих от переменной q . Запишем такое произведение в виде

$$\left(\lambda+1 + \frac{i\alpha}{2q}\right)_n \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\alpha \frac{v^2}{4}\right)^n A_n(t; \lambda), \quad t \equiv \frac{2q}{i\alpha} = -2i\alpha q. \quad (10)$$

Теперь решим следующую задачу: найдем коэффициенты a_p , $p \leq 4$, полинома

$$A_n(t; \lambda) \equiv \prod_{j=1}^n [(\lambda+j)t+1] = 1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n. \quad (11)$$

Все коэффициенты a_p являются функциями $a_p(\lambda, n, \alpha)$ трех дискретных аргументов λ , $n = 1, 2, \dots$ и $\alpha = \pm 1$. Для сокращения записи эти аргументы далее не указываем. Коэффициенты a_p связаны с производными полинома A_n по переменной t :

$$a_p = \frac{(-2i\alpha)^p}{p!} \partial_t^p A_n(t; \lambda)|_{t=0}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Для вычисления таких производных введем суммы

$$S_m(t; \lambda) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{(\lambda + j)^m}{[(\lambda + j)t + 1]^m}, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Эти суммы обладают двумя свойствами: при любых t и λ верны соотношения

$$\partial_t S_1(t; \lambda) = -S_2(t; \lambda), \quad \partial_t S_2(t; \lambda) = -2S_3(t; \lambda), \quad \partial_t S_3(t; \lambda) = -3S_4(t; \lambda),$$

а в частном случае $t = 0$ имеют место представления

$$\begin{aligned} S_1(t; \lambda) &= n\lambda + s_1, & S_2(t; \lambda) &= n\lambda^2 + 2\lambda s_1 + s_2, \\ S_3(t; \lambda) &= n\lambda^3 + 3\lambda(\lambda s_1 + s_2) + s_3, \\ S_4(t; \lambda) &= n\lambda^4 + 4\lambda(\lambda^2 s_1 + s_3) + 6\lambda^2 s_2 + s_4 \end{aligned} \quad (13)$$

через известные табличные суммы [19]

$$\begin{aligned} s_m &\equiv \sum_{j=1}^n j^m, \quad m = 1, 2, 3, 4; & s_1 &= \frac{1}{2}n(n+1), & s_2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ s_3 &= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2, & s_4 &= \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя первое из указанных выше свойств сумм S_m и последовательно увеличивая порядок $p = 1, 2, 3, 4$ производных $\partial_t^p A_n$, выведем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \partial_t A_n &= A_n S_1, & \partial_t^2 A_n &= A_n (S_1^2 - S_2), & \partial_t^3 A_n &= A_n (S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3), \\ \partial_t^4 A_n &= A_n (S_1^4 - 6S_1^2 S_2 + 3S_2^2 + 8S_1 S_3 - 6S_4), \end{aligned} \quad (15)$$

где для краткости записи аргумент t и параметр λ опущены. Теперь в этих равенствах положим $t = 0$ и применим второе свойство сумм S_m . В результате найдем производные $\partial_t^p A_n(t; \lambda)$, $p = 1, 2, 3, 4$, в точке $t = 0$. Затем по формулам (12) получим искомые представления для коэффициентов a_p полинома $A_n(t; \lambda)$. Положив для краткости записи $a \equiv 2\lambda + n + 1$, приведем эти

представления в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= -i\alpha a n, \quad a_2 = -\frac{n}{6}(n-1)(n+1-3a^2), \\ a_3 &= i\alpha a \frac{n}{6}(n-1)(n-2)(n+1-a^2), \\ a_4 &= \frac{n}{360}(n-1)(n-2)(n-3) [15a^2(a^2-2a-4\lambda) + (n+1)(5n+7)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, доказано вспомогательное разложение

$$\left(\lambda + 1 + \frac{i\alpha}{2q}\right)_n \left(-2iq\frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\alpha\frac{v^2}{4}\right)^n \left[1 + \sum_{p=1}^m a_p q^p + O(q^{m+1})\right], \quad (17)$$

где $m = 1, 2, 3, 4$, а a_p — функции (16) дискретных переменных λ , n и α .

Используя это разложение, нетрудно выразить производные $\partial_q^m \Phi$, $q = 0$, $m \leq 4$, исследуемой функции Куммера (9) через функции Бесселя первого рода J_μ и I_μ . Для примера найдем производную первого порядка в точке $q = 0$. В ряду (9) заменим все произведения множителей, зависящих от переменной q , правыми частями равенств (17). Полученный ряд продифференцируем почленно по аргументу q . Положим $q = 0$. Коэффициент a_1 выразим по первой из формул (16) через дискретные аргументы λ , n и α . Итоговое соотношение запишем в виде равенства

$$\partial_q \Phi|_{q=0} = -i\alpha \nu! \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda+2)n + n(n-1)}{\Gamma(\nu+1+n)n!} \left(\alpha\frac{v^2}{4}\right)^n \right\}, \quad \nu = 2\lambda + 1.$$

Это равенство двумя ($m = 0, 1$) однотипными цепочками преобразований

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha v^2/4)^n}{\Gamma(\nu+n+1)} \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{n!} &= \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\alpha v^2/4)^n}{\Gamma(\nu+n+1)} \frac{1}{(n-m-1)!} = \\ &= \left(\alpha\frac{v^2}{4}\right)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha v^2/4)^n}{n! \Gamma(\nu+m+n+1)} \end{aligned} \quad (18)$$

сведем к сумме двух бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} \partial_q \Phi|_{q=0} &= (-i\alpha \nu!) \left(\alpha\frac{v^2}{4}\right) \left\{ (\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha v^2/4)^n}{\Gamma(\nu+2+n)n!} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha\frac{v^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha v^2/4)^n}{\Gamma(\nu+3+n)n!} \right\}. \end{aligned}$$

Сравнив эти ряды с известными разложениями [16] функций Бесселя первого рода

$$\left(\frac{v}{2}\right)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm v^2/4)^n}{n! \Gamma(n + \mu + 1)} = Z_\mu^\pm(v) = \begin{cases} I_\mu(v), \\ J_\mu(v), \end{cases} \quad (19)$$

закключаем, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \partial_q \Phi(\lambda + 1 \pm |\eta|, 2\lambda + 2, -2\nu\rho)|_{q=0} = \\ = \mp \nu! (v/2)^{1-\nu} [(\nu + 1) Z_{\nu+1}^\pm(v) \pm (v/2) Z_{\nu+2}^\pm(v)]. \end{aligned}$$

Функции Бесселя $Z_{\nu+1}^\pm(v)$ ограничены при условии $v < \infty$. Следовательно, при том же условии модуль правой части этого равенства является мажорантой первой производной исходного ряда (9) в точке $q = 0$. Поэтому такой ряд сходится равномерно, если $v < \infty$. Значит, его почленное дифференцирование, использованное выше, правомерно.

Продолжим исследование производных ряда Куммера (9) по переменной q . Последовательно выведем заведомо завышенные, но зато простые мажорантные оценки сумм $S_m(t; \lambda)$ полинома $A_n(t; \lambda)$ и его производных $\partial_t^m A_n(t; \lambda)$.

Для начала заметим, что при любых λ, j и t верно неравенство $|(\lambda + j)t + 1| > 1$, поэтому модуль суммы $S_m(t; \lambda)$ никогда не превосходит значение этой же суммы, взятой в точке $t = 0$. Запишем этот вывод в виде неравенств

$$|S_m(t; \lambda)| \leq S_m(t; \lambda)|_{t=0}, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Далее из определения (11) полинома A_n и соотношений

$$|(\lambda + j)t + 1| = |(\lambda + j)(-2i\alpha q) + 1| = [4(\lambda + j)^2 q^2 + 1]^{1/2} \leq 2(\lambda + j)q + 1$$

следует, что при условиях $2\lambda \geq -1$ и $q \geq 0$ верно неравенство

$$\left| \left(\alpha \frac{v^2}{4} \right)^n A_n(t; \lambda) \right| \leq (\lambda + 1 + |\eta|)_n (2\rho)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя упомянутые выше неравенства, из представлений (15) производных полинома A_n получаем следующие справедливые при любых t, n и λ оценки:

$$\begin{aligned} |\partial_q A_n(t; \lambda)| &\leq (\lambda + 1 + |\eta|)_n (2\rho)^n S_1, \\ |\partial_q^2 A_n(t; \lambda)| &\leq 2(\lambda + 1 + |\eta|)_n (2\rho)^n (S_1^2 + S_2), \\ |\partial_q^3 A_n(t; \lambda)| &\leq 8(\lambda + 1 + |\eta|)_n (2\rho)^n (S_1^3 + 3S_1 S_2 + 2S_3), \\ |\partial_q^4 A_n(t; \lambda)| &\leq 16(\lambda + 1 + |\eta|)_n (2\rho)^n (S_1^4 + 6S_1^2 S_2 + 3S_2^2 + 8S_1 S_3 + 6S_4). \end{aligned} \quad (20)$$

В этих оценках символами S_m обозначены суммы $S_m(t; \lambda)$, взятые в точке $t = 0$. Такие суммы нетрудно выразить через индексы λ , n и m по формулам (13) и (14).

Теперь решим такую задачу: используя первую из оценок (20), покажем, что функция Куммера Φ , заданная равенством (9), имеет непрерывную производную $\partial_q \Phi$ при любых конечных значениях аргументов q и v .

Приступим к решению. Сначала в исходном ряду Куммера (9) заменим все произведения множителей, зависящих от переменной q , правыми частями равенств (10). Полученный ряд продифференцируем почленно по аргументу q и таким образом выведем ряд $\partial_q \Phi$, слагаемые которого содержат функции $\partial_q A_n(q; \lambda)$. Модуль ряда $\partial_q \Phi$ не превосходит ряда Куммера, содержащего вместо функций $\partial_q A_n$ их модули $|\partial_q A_n|$. Каждый такой модуль заменим правой частью первого из неравенств (20), в котором предварительно выразим сумму S_1 через индексы λ и n по формулам (13) и (14). Полученный ряд обозначим символом Q и представим равенствами

$$\begin{aligned} Q(v, q) &\equiv \frac{\nu!}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\nu+n)(\lambda+1+|\eta|)_n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} (2\rho)^n = \\ &= (\lambda+1+|\eta|) \rho \Phi(\lambda+1+|\eta|, 2\lambda+2; 2\rho). \end{aligned}$$

Заметим, что в этих равенствах согласно справочнику [16] функция Куммера неограничена только в пределе $\rho \rightarrow \infty$. Поэтому этим же свойством обладает и функция Q . По построению эта функция является верхней оценкой ряда $|\partial_q \Phi|$. Следовательно, если $\rho < \infty$, то исходный ряд $\partial_q \Phi$ сходится равномерно и является непрерывной функцией переменной q , что и требовалось показать.

Сделаем несколько полезных замечаний.

С помощью оценок (20) производных полинома A_n несложно доказать, что производные $\partial_q^m \Phi$, $m = 2, 3, 4$, исследуемой функции Куммера (9) непрерывны и ограничены при любых конечных значениях аргументов v и q . Доказательство принципиально ничем не отличается от рассмотренного выше случая $m = 1$.

Предложенный и поясненный в настоящем пункте метод можно обобщить на случай $m > 4$ и убедиться в том, что при условиях $q < \infty$, $v < \infty$ функция Куммера (9) имеет непрерывные по переменной q производные любого конечного порядка m . Поэтому при тех же условиях и любом $m < \infty$ для такой функции существует ряд Маклорена, содержащий производные $\partial_q^p \Phi$, $p \leq m$, в точке $q = 0$ и остаточное слагаемое, которое в пределе $q \rightarrow 0+$ убывает как $O(q^{m+1})$. Упомянутое обобщение — довольно трудоемкое занятие. Более простой способ разложения функции Куммера (9) в ряд Маклорена с большим числом слагаемых ($m > 4$) основан на методе, предложенном в п. 5.2.

2.3. Ряды Маклорена для регулярных функций Кулона. Как отмечалось в п. 2.1, $f_\lambda^\pm(v, q)$ — четная функция (8) переменной q . Следовательно, ряд Маклорена функции $f_\lambda^\pm(v, q)$ по переменной q при любом числе $m = 0, 1, \dots$ слагаемых должен содержать только слагаемые с четными степенями $2m$ переменной q . Проверим это следствие в трех случаях: $m = 0$, $m = 1$ и $m = 2$. Для этого построим ряды Маклорена функции $f_\lambda^\pm(v, q)$ по ее аргументу q . Используем все результаты предыдущего пункта.

Приступим к построению. Сначала в разложении (8) функции f_λ^\pm заменим экспоненциальный множитель его известным рядом Маклорена [13]:

$$\exp(\nu q) = \exp\left(\nu q \frac{v^2}{4}\right) = 1 + \sum_{p=1}^4 \frac{(\nu q)^p}{p!} \left(\frac{v^2}{4}\right)^p + O(q^5), \quad v < \infty, \quad (21)$$

а каждое слагаемое, стоящее под знаком суммы в этом же разложении, преобразуем по формуле (10), в которой заменим полином A_n суммой (11) с коэффициентами a_n , заданными формулами (16). Затем в полученном представлении функции f_λ^\pm приведем подобные члены с одинаковой зависимостью от переменной q , и каждый из них соответствующей цепочкой преобразований (18) сведем к произведениям целой степени переменной v и функции Бесселя $I_\mu(v)$ или $J_\mu(v)$.

В результате получим три ($m = 0, 1, 2$) разложения функции f_λ^\pm :

$$f_\lambda^\pm(v, q) = f_{\lambda m}^\pm(v, q) + R_{\lambda m}^\pm(v, q). \quad (22)$$

В каждом из них $R_{\lambda m}^\pm = O(q^{m+1})$ — остаточный член, а $f_{\lambda m}^\pm$ — конечная сумма,

$$f_{\lambda m}^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^m \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s I_{\nu+s}(v) \\ J_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}, \quad (23)$$

в которой коэффициенты b_{ns} вычисляются по формулам

$$b_{00} = 1; \quad b_{12} = \nu + 1, \quad b_{13} = \frac{1}{3}; \quad (24)$$

$$b_{24} = (\nu + 3)(\nu + 1), \quad b_{25} = \frac{2}{3} \left(\nu + \frac{11}{5}\right), \quad b_{26} = \frac{1}{9}$$

и поэтому зависят только от целых индексов n и s и целого числа $\nu = 2\lambda + 1 \geq 0$.

Теперь в формуле (6) заменим функцию f_λ^\pm суммой (22) со слагаемыми (23) и таким образом для функций F_λ выведем искомые ряды Маклорена:

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = F_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|) + q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) \nu! \frac{v}{2} R_{\lambda m}^\pm(v, q), \quad (25)$$

где $m = 0, 1, 2$ и для краткости записи положено

$$\begin{aligned} F_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|) &\equiv q^{\lambda+1} C_{\lambda}(\eta) \nu! \frac{v}{2} f_{\lambda m}^{\pm}(v, q) = \\ &= q^{\lambda+1} C_{\lambda}(\eta) \nu! \frac{v}{2} \sum_{n=0}^m \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{c} (-1)^s I_{\nu+s}(v) \\ J_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно выводам, сделанным в конце предыдущего пункта, разложения (25), (26) функций F_{λ} являются рядами Маклорена при условиях $q < \infty$ и $v < \infty$, а в пределе $q \rightarrow 0+$ функция $R_{\lambda m}$ сходится к нулю как $O(q^{m+1})$, если $v < \infty$. Поэтому функция $F_{\lambda m}$, $m = 0, 1, 2$, является низкоэнергетической асимптотикой функции $F_{\lambda}(\rho, \eta)$ в области $\rho < \infty$.

Поясненный выше способ разложения функций Кулона F_{λ} в ряды Маклорена непрacticен в случае большого числа слагаемых таких рядов. Выгоднее использовать метод, предложенный в следующем пункте.

2.4. Разложения регулярных функций Кулона по функциям Бесселя.

Построение разложений регулярных функций Кулона F_{λ} по функциям Бесселя I_{μ} или J_{μ} начнем с вывода и качественного анализа вспомогательного уравнения.

Подстановкой

$$u_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|) = v y_{\nu}^{\pm}(v, \tau), \quad \tau \equiv (q/2)^2, \quad \nu = 2\lambda + 1, \quad v = \sqrt{2|\eta|\rho} = 2\sqrt{x} \quad (27)$$

сведем исходное уравнение Кулона (3) к уравнению

$$\left[\partial_v^2 + \frac{1}{v} \partial_v \mp 1 - \frac{\nu^2}{v^2} + \tau v^2 \right] y_{\nu}^{\pm}(v, \tau) = 0, \quad v > 0. \quad (28)$$

В случае $\tau = 0$ это уравнение вырождается в уравнение Бесселя целого порядка $\nu = 2\lambda + 1$. Если $\tau \neq 0$, то формальным решением обсуждаемого уравнения будет бесконечный ряд по целым степеням ($n = 0, 1, 2, \dots$) параметра τ . Чтобы угадать строение такого разложения искомого регулярного решения $y_{\nu}^{\pm} = f_{\lambda}^{\pm}$ вернемся к представлению (22)–(24) функции f_{λ}^{\pm} . Это представление позволяет предположить, что функция f_{λ}^{\pm} является следующей двойной суммой: в первой бесконечной сумме индекс « n » принимает значения $0, 1, \dots$, а во второй и конечной сумме при каждом n индекс суммирования « s » пробегает все целые значения от $2n$ до $3n$ включительно. Воспользуемся этим предположением и следующим замечанием: для искомого регулярного решения $f_{\lambda}^{\pm}(v, q)$ уравнения (28) подсумма трех первых слагаемых ($n = 0, 1, 2$) бесконечного разложения по целым степеням параметра τ должна совпадать с функцией $f_{\lambda m}^{\pm}(v, q)$, заданной формулой (23) с $m = 2$. Поэтому решение

f_λ^\pm будем искать в виде бесконечного ряда

$$f_\lambda^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} v^s \left\{ \begin{matrix} (-1)^s I_{\nu+s}(v) \\ J_{\nu+s}(v) \end{matrix} \right\}, \quad (29)$$

в котором коэффициенты b_{ns} при $n \leq 2$ определены формулами (24), а все остальные коэффициенты b_{ns} пока неизвестны.

Докажем, что исследуемый ряд (29) формально удовлетворяет уравнению (28), если коэффициенты b_{ns} подчиняются рекуррентной цепочке уравнений

$$s b_{ns} = n [b_{n-1, s-3} + 2(\nu + s - 1) b_{n-2, s-2}], \quad (30)$$

в которой $s = 2n, 2n + 1, \dots, 3n$ при каждом $n = 0, 1, \dots$, коэффициент b_{00} равен единице, а все коэффициенты b_{mt} равны нулю, если $t < 2m$ или $t > 3m$.

Схема доказательства простая, но ее реализация — довольно трудоемкая и малоинтересная процедура. Поэтому ограничимся лишь описанием основных этапов. В уравнении (28) заменим функцию y_ν^\pm соответствующим рядом (29). Полученное уравнение запишем в виде полинома по целым степеням переменной τ . Каждый из коэффициентов этого полинома приравняем нулю. Затем, применив известные рекуррентные соотношения для функций Бесселя и их производных [16], убедимся в том, что каждое из полученных равенств вырождается в тождество по переменной v , если коэффициенты b_{ns} подчиняются цепочке уравнений (30). Следовательно, при таком условии ряд (29) — формальное решение уравнения (28).

Исследуем коэффициенты b_{ns} . Считаем, что по определению $(-1)!! = 1$.

Заметим, что все коэффициенты (24) удовлетворяют уравнениям (30). Положим в этих уравнениях $s = 3n$, а $n = m, m-1, m-2, \dots, 1$. В результате получим следующую цепочку равенств:

$$b_{n, 3n} = \frac{1}{3} b_{n-1, 3(n-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} b_{n-2, 3(n-2)} = \dots = \frac{1}{3^{n-1}} b_{31},$$

последнее из которых содержит коэффициент b_{13} , равный $1/3$ согласно формулам (24). Следовательно, $b_{n, 3n} = 3^{-n}$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Аналогичным способом, положив $s = 2n$, $n = m, m-1, \dots, 1$, из соотношений (24) и (30) получаем

$$b_{n, 2n} = \prod_{m=0}^{n-1} [(\nu - 1 + 2(n - m))] = \frac{(\nu + 2n - 1)!!}{(\nu - 1)!!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Докажем по индукции два утверждения: все коэффициенты b_{ns} положительные и при каждом n убывают с ростом s . В качестве первого этапа индукции заметим, что согласно формулам (24) эти утверждения верны при $n \leq 2$.

Докажем первое утверждение. Предположим, что $b_{n-1,s} > 0$ при некотором n и любом s , таком что $2(n-1) \leq s \leq 3(n-1)$. Тогда из цепочки (30) следует, что $b_{ns} > 0$ при любом целом s , удовлетворяющем условию $3n \leq s \leq 2n$.

Теперь докажем второе утверждение. Предположим, что при некотором n и условии $s < s'$ верны неравенства $b_{n-1,s} > b_{n-1,s'}$. Сравним равенство (30) с равенством, полученным из него заменой $s \rightarrow s+1$. Для этого последнее запишем в виде равенства

$$b_{n,s+1} = \frac{n}{s+1} b_{n-1,s-2} + 2n \left(1 + \frac{\nu-1}{s+1} \right) b_{n-1,s-1}.$$

Согласно нашему предположению $b_{n-1,s-3} > b_{n-1,s-2}$ и $b_{n-1,s-2} > b_{n-1,s-1}$. Следовательно, $b_{n,s+1} < b_{ns}$ при любом s , что и требовалось показать.

Суммируя доказанные свойства всех коэффициентов b_{ns} , запишем

$$\frac{1}{3^n} = b_{n,3n} < b_{n,3n-1} < \dots < b_{n,2n+1} < b_{n,2n} = \frac{(\nu+2n-1)!!}{(\nu-1)!!}. \quad (31)$$

Следовательно, при данном n из всех коэффициентов b_{ns} , $s = 2n, 2n+1, \dots, 3n$, наибольшим является коэффициент $b_{n,2n}$. Это свойство окажется далее ключевым.

2.5. Свойства разложений регулярных функций Кулона по функциям Бесселя. Самое важное свойство разложений (7), (29) функций Кулона F_λ по функциям Бесселя заключается в их равномерной сходимости. Докажем и исследуем это свойство сначала в случае $\alpha = -1$, а затем в случае $\alpha = 1$.

Найдем мажоранту ряда (29) в случае $\alpha = -1$. Для этого исследуем ряд, все слагаемые которого равны модулям слагаемых исходного ряда (29). В этом ряду при каждом n заменим все коэффициенты b_{ns} наибольшим из них коэффициентом $b_{n,2n}$. Чтобы оценить сверху каждое слагаемое полученного ряда, последовательно применим неравенство Ватсона [16]

$$|J_\mu(v)| \leq \frac{(v/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}, \quad \mu \geq -1/2, \quad (32)$$

и два очевидных соотношения: неравенство

$$\frac{1}{(\nu+2n+m)!} \leq \frac{1}{(\nu+2n)!} \frac{1}{(\nu+2n+1)^m}$$

и неравенство

$$\frac{(\nu+2n-1)!!}{(\nu-1)!!} \frac{1}{(\nu+2n)!} = \frac{1}{\nu!} \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\nu+2n-2m} \leq \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(\nu+2)^n}.$$

В итоге получим следующую оценку:

$$|f_{\lambda}^{-}(v, q)| \leq \frac{1}{\nu!} \left(\frac{v}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho^2}{2(\nu+2)}\right)^n \frac{1}{n!} B_n(v).$$

Заменяв в ней конечную сумму $B_n(v)$ табличной суммой [19] по формулам

$$B_n(v) \equiv \sum_{m=0}^n \left[\frac{v^2}{2(\nu+2m+1)} \right]^m \leq \sum_{m=0}^n t^m = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}, \quad t \equiv \frac{v^2}{2(\nu+1)},$$

получим искомую мажоранту бесконечного ряда (29) в случае $\alpha = -1$.

Мажоранту этого ряда в случае $\alpha = 1$ построим аналогичным способом, но вместо неравенства Ватсона (32) используем оценки [18]

$$0 \leq I_{\mu}(v) \leq \frac{(v/2)^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \operatorname{ch} v, \quad \mu > -1/2, \quad v \geq 0. \quad (33)$$

Итоговые соотношения, полученные в обоих случаях, представим формулой

$$|f_{\lambda}^{\pm}(v, q)| \leq \frac{1}{\nu!} \left(\frac{v}{2}\right)^{\nu} \frac{\exp z - t \exp(zt)}{1-t} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{ch} v \\ 1 \end{array} \right\}, \quad z \equiv \frac{\rho^2}{2(\nu+2)}. \quad (34)$$

В силу этой формулы бесконечные ряды $f_{\lambda}^{\pm}(v, q)$ сходятся равномерно по обоим неотрицательным аргументам v и q , если эти аргументы ограничены и $\nu = 2\lambda + 1 > 0$.

Выясним скорость такой сходимости. Для этого оценим разность между бесконечным рядом $f_{\lambda}^{\pm}(v, q)$ и его конечной подсуммой $f_{\lambda m}^{\pm}(v, q)$, $m < \infty$, составленной из всех слагаемых этого ряда с номером $n = 0, 1, \dots, m$ и заданной формулой (23). Способом, использованным для доказательства неравенств (34), получаем оценку остаточного слагаемого $R_{\lambda m}^{\pm}$ суммы (22):

$$|R_{\lambda m}^{\pm}(v, q)| = |f_{\lambda}^{\pm}(v, q) - f_{\lambda m}^{\pm}(v, q)| \leq \chi(v, q) \equiv \frac{1}{\nu! m!} \left(\frac{v}{2}\right)^{\nu} \frac{z^m}{1-t_m} \times \\ \times [\exp z - t_m^{m+1} \exp(zt_m)] \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{ch} v \\ 1 \end{array} \right\}; \quad t_m \equiv \frac{v^2}{2(\nu+1+2m)}. \quad (35)$$

Из нее следует, что в пределе $\rho \rightarrow 0$ и конечная сумма $f_{\lambda m}^{\pm}(v, q)$ приближает ряд $f_{\lambda}^{\pm}(v, q)$ с точностью порядка $O(z^m) = O(\rho^{2m})$.

Вернемся к исходному представлению (7) функции $F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|)$ через функцию $f_{\lambda}^{\pm}(v, q)$. Заменяв в нем функцию f_{λ}^{\pm} бесконечным рядом (29), получим искомое разложение функции Кулона F_{λ} по функциям Бесселя:

$$F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1} C_{\lambda}(\eta) \nu! \frac{v}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{c} (-1)^s I_{\nu+s}(v) \\ J_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}. \quad (36)$$

Оценим модуль разности этого ряда и его частичной суммы $F_{\lambda m}$, $m < \infty$, определенной формулой (26). Применяя равенства (25) и (35), находим

$$|F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|) - F_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|)| \leq q^{\lambda+1} C_{\lambda}(\eta) \nu! \frac{\nu}{2} \chi(\nu, q). \quad (37)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0+$ функция $F_{\lambda m}$ приближает функцию F_{λ} области $\rho < \infty$ с абсолютной точностью $O(q^{\lambda+1} C_{\lambda}(\eta) \rho^{2m})$.

Для полноты предложим способ численного анализа качества приближения

$$F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|) \approx F_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|). \quad (38)$$

Начнем с обсуждения функции

$$D_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|, \varepsilon) \equiv \log \frac{|F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|) - F_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|)| + \varepsilon}{|F_{\lambda}(\rho, \pm|\eta|)| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (39)$$

Функция $D_{\lambda m}$ непрерывна по любому ее аргументу, равна нулю в точке $\rho = 0$ и имеет локальный максимум или локальный минимум в той точке, в которой функция F_{λ} или разность функций F_{λ} и $F_{\lambda m}$ обращается в нуль. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0+$ обсуждаемая функция $D_{\lambda m}$ становится логарифмом относительной точности аппроксимации (38). Следовательно, при достаточно малом, но положительном значении аргумента ε функция $D_{\lambda m}$ близка к такому логарифму.

Наглядное представление об абсолютной и относительной точности аппроксимации (38) в случаях $2\lambda = -1$, $\alpha = \pm 1$ и $q = 0, 1$, $q = 0, 5$ дают рис. 1 и 2. На рис. 1 изображены графики функции F_{λ} и аппроксимирующих ее функций $F_{\lambda m}$, $m = 0, 2, 5$, заданных формулами (26). На рис. 2 представлены графики функций $D_{\lambda m}$, вычисленных по формулам (39) при $m = 0, 2, 5$ и довольно малом значении $\varepsilon = 10^{-12}$. Согласно рис. 1 и 2, абсолютная и относительная точность аппроксимации (38), соответственно на отрезке $0 \leq \rho \leq 10$ и на отрезке $0 \leq \rho \leq 5$, улучшается с ростом m при фиксированном значении переменной q и с уменьшением значения этой переменной при данном m .

Уместным представляется следующее замечание. При выводе неравенств (35) и (37) все коэффициенты b_{ns} заменялись наибольшим коэффициентом $b_{n, 2n}$, а для функций Бесселя J_{μ} и I_{μ} использовались оценки (32) и (33), которые становятся излишне завышенными при больших значениях аргумента ν . Поэтому тем же недостатком обладают и правые части мажорантных оценок (35) и (37) скорости сходимости рядов (29) и (36). Этот вывод подтверждают и обсужденные выше результаты численного анализа, указывающие на сходимость этих рядов по числу m их слагаемых не только при малых, но и при довольно больших значениях аргумента ρ .

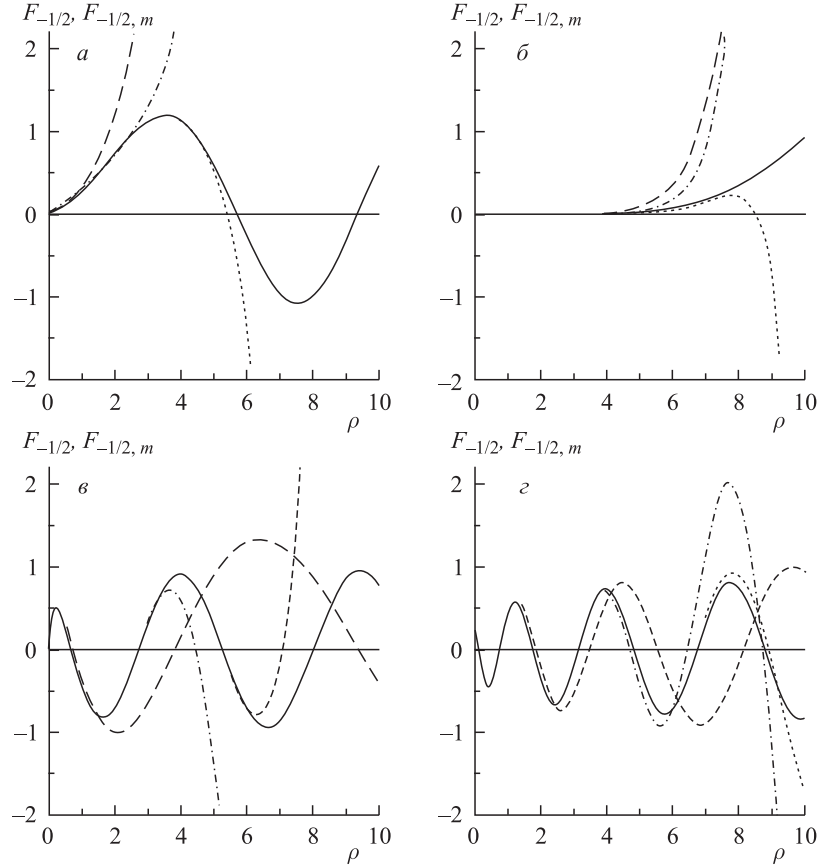


Рис. 1. График функции $F_{-1/2}(\rho, \alpha|\eta)$ — сплошная кривая, графики функций $F_{-1/2,m}(\rho, \alpha|\eta)$, $m = 0, 2, 5$, — штриховая, штрихпунктирная и точечная кривые: а) $\alpha = 1, q = 0, 5$; б) $\alpha = 1, q = 0, 1$; в) $\alpha = -1, q = 0, 5$; г) $\alpha = -1, q = 0, 1$

Кроме установленной выше равномерной сходимости разложение (36) функции Кулона F_λ полуцелого порядка по функциям Бесселя обладает двумя особыми свойствами. Во-первых, согласно формулам (24) и (30) все коэффициенты $b_{n,s}$ этого разложения зависят только от их номеров n, s и порядка λ . Во-вторых, зависимость любого слагаемого обсуждаемого разложения от переменной q и от переменной v выделена в явном виде и представляется произведением четной степени аргумента q и соответствующей функции Бесселя аргумента v .

Известные разложения [17] функций Кулона $F_\ell(\rho, \alpha|\eta)$ целого порядка $\ell = 0, 1, \dots$ по функциям Бесселя–Клиффорда в случае $\alpha = 1$ или по сферическим функциям Бесселя в случае $\alpha = -1$ не обладают аналогичными

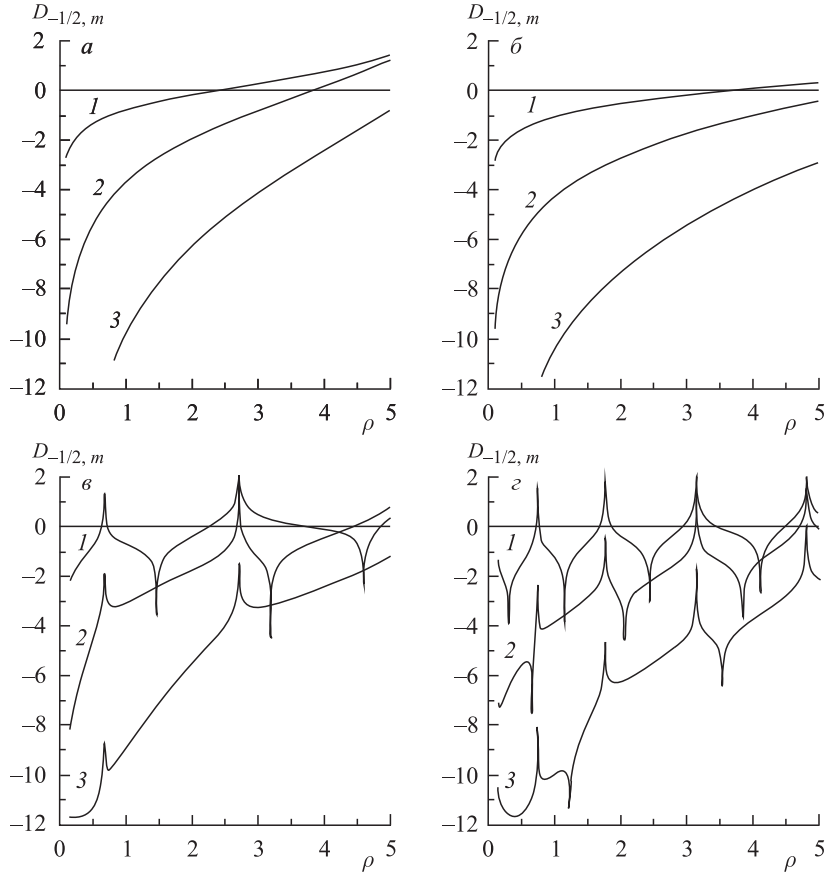


Рис. 2. Графики функций $D_{-1/2, m}(\rho, \alpha|\eta)$ при $m = 0, 2, 5$ и $\varepsilon = 10^{-12}$ — кривые 1, 2 и 3: а) $\alpha = 1, q = 0, 5$; б) $\alpha = 1, q = 0, 1$; в) $\alpha = -1, q = 0, 5$; г) $\alpha = -1, q = 0, 1$

свойствами. Потому что коэффициенты b_k таких разложений зависят от переменной η , но в явном виде эта зависимость до сих пор не выявлена.

Если $2\lambda \geq -1$, то для исходного уравнения Кулона (3) точка $\rho = 0$ является регулярной. Поэтому все без исключения представления (6)–(8) и (36) регулярного в этой точке решения F_λ такого уравнения остаются в силе при любых вещественных значениях порядка $\lambda \geq -1/2$, в том числе в случае $\lambda = \ell$, где ℓ — целое число.

Стоит отметить, что в частном случае $\alpha = 1 > 0$ и $\lambda = \ell = 0$ подсумма всех слагаемых разложения (36) с индексом $n = 0, 1, 2$ становится давно известным приближением, предложенным Фрёбергом в работе [20].

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

В настоящем разделе все исследования выполняются по той же схеме, что и в предыдущем, но объектами исследования являются нерегулярные в точке $\rho = 0$ решения уравнения Кулона (3) — функции $G_\lambda(\rho, \eta)$ и $\Theta_\lambda(\rho, \eta)$. В п. 3.1 приводятся определения [11] и известные разложения [12] этих функций в бесконечные ряды, содержащие целые степени переменной v и ее логарифм. П. 3.2 целиком посвящен выводам и пояснениям вспомогательных формул. В п. 3.3 эти формулы используются для представления функции Θ_λ в виде ряда Маклорена по переменной q с остаточным слагаемым $O(q^4)$. В п. 3.4 для функции Θ_λ выводится формальное разложение по функциям Бесселя первого и второго рода.

3.1. Представления и свойства нерегулярных функций Кулона. Следуя работе [11], нерегулярной вещественной волновой функцией Кулона полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ считаем решение $G_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \begin{cases} O(\sqrt{\rho} \ln \rho), & 2\lambda = -1, \\ O(\rho^{-\lambda}), & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0,$$

и условию

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \cos[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Функцию G_λ можно представить в виде суммы [12]:

$$G_\lambda(\rho, \eta) = -\frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta). \quad (40)$$

Эта сумма содержит неаналитическую функцию h^c ,

$$h^c(\eta) \equiv \operatorname{Re} \Psi(1/2 + i\eta) - \ln(|\eta|),$$

и функцию Θ_λ . Ее можно записать в виде произведения:

$$\Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \theta_\lambda^\pm(v, q), \quad \rho = qx = q\frac{v^2}{4}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}. \quad (41)$$

В этом произведении множитель $\theta_\lambda^\pm(v, q)$ является следующим рядом [12]:

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^\pm(v, q) \equiv & -\frac{1}{2} [(2\lambda + 1)!]^2 P_\lambda(q^2) \exp\left(i q \frac{v^2}{4}\right) \times \\ & \times \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + n)! n!} \left(\lambda + 1 \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p \pm i/(2q)} - \Psi(n + 1) - \Psi(\nu + n + 1) + 2 \ln(v/2) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \exp\left(i q \frac{v^2}{4}\right) \left(-\frac{2}{v}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - n - 1)!}{n!} \left(-\lambda \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(2iq \frac{v^2}{4}\right)^n, \quad (42) \end{aligned}$$

где полином P_λ степени $\lambda + 1/2$ переменной q^2 определяется равенством

$$\begin{aligned} P_\lambda(q^2) = & q^{2\lambda+1} \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}(\eta)} \right]^2 = \frac{1}{[(2\lambda + 1)!]^2} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{2}{3} \lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1) q^2 \left[1 + \frac{1}{15} (\lambda - 1)(2\lambda - 1)(5\lambda + 6) q^2 + \dots \right] \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

а последняя сумма полагается равной нулю в случае $2\lambda = -1$, $\nu \equiv 2\lambda + 1 = 0$.

Перечислим важные свойства функции θ_λ^\pm . Вследствие представления (42) в пределе $v \rightarrow 0$, $q < \infty$ эта функция неограниченно возрастает:

$$\theta_\lambda^\pm(v, q) \sim \begin{cases} -\ln(v/2), & 2\lambda = -1, \\ (2/v)^{2\lambda+1} (2\lambda)!/2, & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad v \rightarrow 0, \quad q < \infty. \quad (44)$$

Так как функция Θ_λ удовлетворяет исходному уравнению Кулона (3) и связана с функцией θ_λ^\pm равенством (41), функция θ_λ^\pm является нерегулярным решением y_ν^\pm , $\nu = 2\lambda + 1$, уравнения (28). Действительно, функция θ_λ^\pm имеет расходящуюся асимптотику (44), а уравнение Кулона (3) сводится к уравнению (28) подстановкой

$$u_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \theta_\lambda^\pm(v, q), \quad y_\nu^\pm(v, q) = \theta_\lambda^\pm(v, q).$$

В отличие от функции G_λ обе функции Θ_λ и θ_λ^\pm являются четными функциями волнового числа q . Это свойство и вспомогательные соотношения, перечисленные в следующем пункте, окажутся ключевыми в п. 3.3 и 3.4.

3.2. Вспомогательные соотношения. Разложение (42) функции θ_λ^\pm содержит два произведения: уже исследованное в п. 2.2 произведение функций

$(\lambda + 1 + \imath\alpha/(2q))_n$ и $(-2\imath qv^2/4)^n$ и произведение функций $(-\lambda + \imath\alpha/(2q))_n$ и $(2\imath qv^2/4)^n$. Построим ряд Маклорена для последнего произведения. Для этого используем определение (11) полинома $A_n(t; \lambda)$ переменной $t = -2\imath\alpha q$ и равенства

$$\begin{aligned} \left(-\lambda + \frac{\imath\alpha}{2q}\right)_n \left(2\imath q \frac{v^2}{4}\right)^n &= \left(-\alpha \frac{v^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [(-\lambda - 1)t + j] = \\ &= \left(-\alpha \frac{v^2}{4}\right)^n A_n(t; -\lambda - 1) = \left(-\alpha \frac{v^2}{4}\right)^n \left(1 + \sum_{p=1}^4 a_p q^p + \dots\right). \end{aligned} \quad (45)$$

Эти равенства содержат коэффициенты a_p полинома $A_n(t; -\lambda - 1)$. Представления таких коэффициентов через номер n и индекс « λ » получим из формул (16) для коэффициентов a_p полинома $A_n(t; \lambda)$ заменой $\lambda \rightarrow -\lambda - 1$, при которой сумма $a = n + (2\lambda + 1)$ перейдет в разность: $a = n - (2\lambda + 1)$.

В разложении (42) функции θ_λ^\pm имеется конечная сумма $\tilde{S}_n(q; \lambda)$ по индексу « p ». Покажем, что эту сумму можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(q; \lambda, \alpha) \equiv \sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p + \imath\alpha/(2q)} &= -\imath\alpha(2n+\nu)q + \frac{1}{2}(2n+\nu)^2q^2 - \\ &- \sum_{m=3}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} (n + \lambda - p)^{m-1} \right] (2\imath\alpha q)^m. \end{aligned} \quad (46)$$

Введем переменную $t \equiv -2\imath\alpha q$. В этой переменной

$$\tilde{S}_n(q; \lambda, \alpha) = \sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{t}{n + \lambda - p + t},$$

поэтому имеют место равенства

$$\partial_t^m \tilde{S}_n(q; \lambda, \alpha) = (-1)^{m+1} (m!) \sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{(n + \lambda - p)^{m-1}}{[(n + \lambda - p)t + 1]^{m+1}}, \quad m \geq 1.$$

Благодаря этим равенствам в точке $t = 0$ исследуемая функция \tilde{S}_n и все ее производные $\partial_t^m \tilde{S}_n$, $m \leq 4$, сводятся к табличным суммам (14). Используя их, построим ряд Маклорена для функции \tilde{S}_n по переменной t , а затем перейдем в этом ряду к переменной $q = \imath\alpha t/2$. В итоге получим формулу (46), которую и требовалось доказать.

Напомним известные соотношения [16] — свойство пси-функции

$$\Psi(t+n) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{t+p-1} + \Psi(t) \quad (47)$$

и разложения нерегулярных функций Бесселя $K_\mu(v)$ и $Y_\mu(v)$ целого порядка μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(-1)^\mu K_\mu(v) \\ -\pi Y_\mu(v) \end{array} \right\} = \left(\mp \frac{v}{2}\right)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} [\Psi(n+1) + \Psi(\nu+n+1)] \frac{(\pm v^2/4)^n}{(\nu+n)!n!} - 2 \ln(v/2) \left\{ \begin{array}{l} I_\mu(v) \\ J_\mu(v) \end{array} \right\} + \left(\frac{2}{v}\right)^\mu \sum_{n=0}^{\mu-1} \frac{(\mu-n-1)!}{n!} \left(\pm \frac{v^2}{4}\right)^n. \quad (48)$$

При $\mu = 0$ конечные суммы в этих разложениях полагаются равными нулю.

3.3. Ряды Маклорена для нерегулярных функций Кулона. Перейдем к выводу разложения функции θ_λ^\pm , заданной формулой (42), в ряд Маклорена по переменной q . Согласно этой формуле функция θ_λ^\pm содержит бесконечный ряд S_1 и конечную сумму S_2 . Модуль суммы S_2 неограниченно возрастает только в случае $v \rightarrow 0+$. Поэтому далее придется положить $v \neq 0$. Все производные суммы S_2 по переменной q непрерывны при условии $q < \infty$. Способом, изложенным в п. 2.2, нетрудно показать, что таким же свойством обладают и производные $\partial_q^m S_1$ ряда S_1 порядка $m \leq 4$. Следовательно, функцию θ_λ^\pm можно представить рядом Маклорена по переменной q с остаточным слагаемым $R_{\lambda m} = O(q^m)$, $m = 4$, при условиях $v \in (0, \infty)$ и $q \in [0, \infty)$. Осталось построить такой ряд.

Предлагаемое построение принципиально ничем не отличается от подробно изложенного в п. 2.3 вывода разложений (22)–(24) для функции f_λ^\pm . Поэтому ограничимся только перечислением основных преобразований.

При любом λ в качестве исходного используем разложение (42) функции θ_λ^\pm . Заменяем в нем экспоненциальную функцию ее рядом Маклорена (21). Затем применим формулы (17) и (45), используем равенство (46) и свойство пси-функции (47). В полученном разложении выделим слагаемое, не зависящее от q , и слагаемые, пропорциональные q^2 и q^4 . Бесконечные ряды по переменной v , содержащиеся в таких слагаемых, просуммируем в функции Бесселя первого и второго рода. Для этого используем соответствующие ряды (19) и (48) и определения (24) коэффициентов b_{ns} . В результате

получим искомое разложение функции θ_λ^\pm в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^\pm(v, q) = & \sum_{n=0}^1 \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-1)^s b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{l} K_{\nu+s}(v) \\ (-\pi/2) Y_{\nu+s}(v) \end{array} \right\} + \\ & + \frac{2}{3} \lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) q^2 \left\{ \begin{array}{l} K_\nu(v) \\ (-\pi/2) Y_\nu(v) \end{array} \right\} - \frac{q^2}{12} b_{00} \left\{ \begin{array}{l} I_\nu(v) \\ J_\nu(v) \end{array} \right\} + R_{\lambda 4}(v, q) \end{aligned} \quad (49)$$

с остаточным слагаемым $R_{\lambda 4} = O(q^4)$ и переменными v и q , удовлетворяющими условиям $v \in (0, \infty)$ и $q \in [0, \infty)$.

Этот ряд, в отличие от ряда Маклорена (22)–(24) для функции f_λ^\pm , содержит нерегулярные функции Бесселя наряду с регулярными по простой причине. Поясним ее. В исходном представлении (42) функции θ_λ^\pm имеется конечная сумма по индексу p и алгебраическая сумма двух пси-функций и логарифмической функции. Первая и вторая из этих сумм при выводе ряда Маклорена (49) для функции θ_λ^\pm порождают соответственно разложения (19) и (48) регулярных и нерегулярных функций Бесселя.

Ряды Маклорена для функций G_λ и Θ_λ с остаточными слагаемыми $O(q^4)$ построить нетрудно. Для этого нужно в правых частях равенств (40) и (41) заменить функции F_λ и θ_λ^\pm соответствующими суммами (25), (26) и (49).

3.4. Разложения нерегулярных функций Кулона по функциям Бесселя.

Наша следующая задача — представить функцию $\theta_\lambda^\pm(v, q)$ в виде такого бесконечного ряда по четным степеням q^{2n} аргумента q , частичная сумма слагаемых которого с номерами $n = 0, 1, 2$ равна правой части равенства (49).

Решение этой задачи начнем со следующих предположений: все коэффициенты b_{ns} подчинены цепочке рекуррентных уравнений (30), ряд

$$g_\lambda^\pm(v, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-1)^s b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{l} K_{\nu+s}(v) \\ (-\pi/2) Y_{\nu+s}(v) \end{array} \right\} \quad (50)$$

равномерно сходится при условиях $0 \leq q < \infty$ и $0 < v < \infty$.

Выявим основные свойства этого ряда. Сначала найдем старшее слагаемое его асимптотики в пределе $v \rightarrow 0$. Для этого в представлении (50) заменим все функции Бесселя старшими слагаемыми их разложений (48) и таким образом в случае $2\lambda = -1$ получим формулу

$$\begin{aligned} g_\lambda^\pm(v, q) = & -\ln(v/2) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-2)^s b_{ns} + O(v^2 \ln v), \\ & v \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (51)$$

а в оставшемся случае $2\lambda \geq 1$ — формулу

$$g_\lambda^\pm(v, q) = 2 \left(\frac{2}{v}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-2)^s b_{ns} (\nu + s - 1)! + O(v^{-\nu+1}), \quad (52)$$

$$v \rightarrow 0.$$

Теперь в уравнении (28) заменим функцию y_ν^\pm рядом g_λ^\pm . Используя для функций Бесселя K_μ и Y_μ и их производных известные рекуррентные соотношения [16], убедимся в том, что ряд g_λ^\pm является решением уравнения (28). Согласно асимптотикам (51) и (52) это решение нерегулярно в точке $v = 0$ и поэтому линейно независимо по отношению к уже исследованному в п. 2.3–2.5 регулярному решению f_λ^\pm уравнения (28).

Перейдем к построению решения θ_λ^\pm уравнения (28) в виде разложения по функциям Бесселя. Так как это уравнение имеет два линейно независимые решения f_λ^\pm и g_λ^\pm , любое другое решение можно представить в виде линейной комбинации этих решений и коэффициентов c_λ^\pm и d_λ^\pm , которые в общем случае зависят от переменной q . Представим искомое решение θ_λ^\pm в виде такой комбинации:

$$\theta_\lambda^\pm(v, q) = c_\lambda^\pm(q) f_\lambda^\pm(v, q) + d_\lambda^\pm(q) g_\lambda^\pm(v, q) \quad (53)$$

и приступим к определению функций c_λ^\pm и d_λ^\pm .

Сначала найдем функцию $d_\lambda^\pm(q)$. Для этого применим самый простой способ: в соотношении (53) перейдем к пределу $v \rightarrow 0$, $q < \infty$. В этом пределе согласно представлению (8) функция f_λ^\pm ограничена, а функции θ_λ^\pm и g_λ^\pm неограниченно возрастают по законам (44) и (51), (52). Поэтому в обсуждаемом пределе соотношение (53) вырождается в уравнение относительно неизвестной функции d_λ^\pm . Это уравнение не содержит функции c_λ^\pm и имеет единственное решение:

$$d_{-1/2}^\pm(q) \equiv 1;$$

$$d_\lambda^\pm(q) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-2)^s b_{ns} \frac{(2\lambda + s)!}{(2\lambda)!} \right\}^{-1}, \quad 2\lambda > -1.$$

Теперь найдем функцию c_λ^\pm . Согласно формулам (19), (29), (42), (48) и (50) левая и правая части соотношения (53) являются бесконечными разложениями по системе линейно независимых функций v^n , $v^m \ln v$ с целыми номерами n и m . Следовательно, это соотношение верно тогда и только тогда, когда каждое слагаемое $s_n(q)v^n$ или $t_n(q)v^m \ln v$ разложения (42) функции θ_λ^\pm равно соответствующему слагаемому $\tilde{s}_n(q)v^n$ или $\tilde{t}_n(q)v^m \ln v$ разложения функции $c_\lambda^\pm f_\lambda^\pm + d_\lambda^\pm g_\lambda^\pm$. В частности, должно выполняться равенство

$s_n(q)v^n = \tilde{s}_n(q)v^n$ с номером $n = \nu$. Из этого условия следует представление функции c_λ^\pm через уже найденную функцию d_λ^\pm : в случае $2\lambda = -1$

$$c_\lambda^\pm(q) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-2)^s b_{ns} (s-1)!,$$

а в случае $2\lambda > -1$

$$\begin{aligned} 2c_\lambda^\pm(q) &= [(2\lambda+1)!]^2 [P_\lambda(q^2) - d_\lambda^\pm(q)] [\Psi(1) + \Psi(2\lambda+2)] - \\ &- [(2\lambda+1)!]^2 P_\lambda(q^2) \sum_{p=0}^{\lambda-1/2} \frac{1}{\lambda-p \pm \nu/(2q)} + \\ &+ (iq)^{2\lambda+1} (2\lambda)! \sum_{n=0}^{2\lambda} \frac{2^n}{n!} \left(-\lambda \pm \frac{\nu}{2q}\right)_n. \end{aligned}$$

Обсудим свойства функций c_λ^\pm и d_λ^\pm . Согласно полученным выше представлениям эти функции являются четными функциями аргумента q , удовлетворяют соотношениям $c_\lambda^+(q) = c_\lambda^-(q)$ и $d_\lambda^+(q) = d_\lambda^-(q)$ и имеют следующие асимптотики:

$$c_\lambda^\pm(q) = -\frac{q^2}{12} + O(q^2), \quad d_\lambda^\pm(q) = 1 + \frac{2}{3}\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1)q^2 + O(q^4), \quad q \rightarrow 0+.$$

Заметим, что благодаря таким асимптотикам и определению (43) полинома P_λ из представления (53) функции θ_λ следует ее ряд Маклорена (49), что и требовалось показать при постановке задачи в начале настоящего пункта.

Теперь выведем низкоэнергетическую асимптотику нерегулярной функции Кулона Θ_λ , заданную рядом (42). Символами $f_{\lambda m}^\pm$ и $g_{\lambda m}^\pm$ обозначим конечные ($m < \infty$) подсуммы бесконечных рядов (29) и (50), содержащие коэффициенты b_{ns} с номером $n \leq m$. Введем функции $\theta_{\lambda m}^\pm$ и $\Theta_{\lambda m}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda m}(v, q) &\equiv c_\lambda(q) f_{\lambda m}^\pm(v, q) + d_\lambda(q) g_{\lambda m}^\pm(v, q), \\ \Theta_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|) &\equiv \frac{v}{(2\lambda+1)!} \theta_{\lambda m}^\pm(v, q). \end{aligned}$$

Используя эти определения, запишем нерегулярную функцию Кулона Θ_λ в низкоэнергетическом пределе как сумму

$$\Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \Theta_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|) + O(q^{2m+2}), \quad q \rightarrow 0+, \quad 0 < v < \infty, \quad (54)$$

в которой первое слагаемое

$$\Theta_{\lambda m}(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{(2\lambda+1)!} \sum_{n=0}^m \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \times \\ \times \sum_{s=2n}^{3n} (-1)^s b_{ns} v^s \left\{ \begin{array}{l} c_{\lambda}^+(q) I_{\nu+s}(v) + d_{\lambda}^+(q) K_{\nu+s}(v) \\ (-1)^s c_{\lambda}^-(q) J_{\nu+s}(v) + d_{\lambda}^-(q) (-\pi/2) Y_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}. \quad (55)$$

Сформулируем основной результат исследований, выполненных в настоящем пункте, следующим образом: если ряд (50) сходится равномерно, то функция $\Theta_{\lambda m}$, $m > 2$, является низкоэнергетической асимптотикой нерегулярной функции Кулона Θ_{λ} . Доказать равномерную сходимость этого ряда не удалось из-за отсутствия в справочной литературе [16–18] равномерных по аргументу v мажорантных оценок функций $Y_{\mu}(v)$ и $K_{\mu}(v)$. Итоги численного сравнения функций Θ_{λ} , $2\lambda = \pm 1, 3$, с функциями $\Theta_{\lambda m}$, $m = 0, 5, 10$, проведенного по методике, изложенной в п. 2.5, подтверждают справедливость приближения $\Theta_{\lambda} \approx \Theta_{\lambda m}$ при условиях $0 < v < \infty$ и $q \rightarrow 0+$ и указывают на улучшение точности этого приближения при увеличении числа m .

Стоит отметить, что предложенный здесь способ разложения нерегулярных функций Кулона Θ_{λ} полуцелого порядка λ по функциям Бесселя применим и в случае целых значений $\lambda = \ell$, где $\ell = 0, 1, \dots$

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

В работе [7] показано, что уравнение Шрёдингера (1) имеет точное решение

$$\Psi^c(\rho, \varphi, \eta) = C(\eta) \exp(i\rho \cos \varphi) \Phi(-i\eta, 1/2, \xi), \quad \xi \equiv 2i\rho [\sin(\varphi/2)]^2, \quad (56)$$

где Φ — известная функция Куммера [16],

$$\Phi(-i\eta, 1/2; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)_n}{(1/2)_n} \frac{\xi^n}{n!}, \quad (57)$$

а функция $C(\eta)$ определена равенством

$$C(\eta) = [\Gamma(1/2 + i\eta)/\Gamma(1/2)] \exp(-\pi\eta/2). \quad (58)$$

Как пояснялось в работе [11], функция Ψ^c , заданная формулами (56)–(58), является физически приемлемой волновой функцией двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы неподвижным силовым центром. В п. 4.1

и 4.2 построим явную асимптотику функции Ψ^c в пределе $q \rightarrow 0+$, сохранив множители $C(\eta)$ и $\exp(i\rho \cos \varphi)$. Ясно, что для решения такой задачи достаточно заменить в формуле (56) функцию Куммера (57) ее рядом Маклорена по переменной q .

4.1. Приближение волновой функции конечным рядом Маклорена.

Приступим к построению такого ряда методом, предложенным в п. 2.2. Будем использовать аргумент $w \equiv \sqrt{2\xi/(iq)}$ и прежние обозначения функций Бесселя (19) первого рода: $Z_\mu^+ \equiv I_\mu$, $Z_\mu^- \equiv J_\mu$. Применив известные равенства [16]

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\sqrt{\pi}},$$

получим для исследуемой функции Куммера (57) представление в виде ряда

$$\Phi(-i\alpha|\eta|, 1/2; \xi) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha/(2q))_n}{\Gamma(1/2+n)n!} \left(2iq \frac{w^2}{4}\right)^n, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad \xi = iq \frac{w^2}{2}. \quad (59)$$

Каждое слагаемое этого ряда содержит произведение символа Похгаммера и четной степени переменной w . Если $t = -2i\alpha q$, а $A_n(t; \lambda)$ — полином (11), то для такого произведения верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \left(-\frac{i\alpha}{2q}\right)_n \left(2iq \frac{w^2}{4}\right)^n &= \left(\alpha \frac{w^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [(j-1)(-t) + 1] = \\ &= \left(\alpha \frac{w^2}{4}\right)^n A_n(-t, \lambda)|_{\lambda=-1} = \\ &= \left(\alpha \frac{w^2}{4}\right)^n \left[1 + \sum_{j=1}^4 a_j q^j + \dots + (n-1)! (2i\alpha q)^{n-1}\right], \quad (60) \end{aligned}$$

в которой коэффициенты a_j выражаются через номер n и произведение $a = n(n-1)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} a_1 = i\alpha a, \quad a_2 = -\frac{a}{6}(n-2)(3n-1), \quad a_3 = -i\alpha \frac{a^2}{6}(n-2)(n-3), \\ a_4 = \frac{a}{360}(n-2)(n-3)(n-4)(15n^3 - 30n^2 + 5n + 2). \end{aligned} \quad (61)$$

Действительно, полином $A_n(-t; \lambda)|_{\lambda=-1}$ получается из полинома $A_n(t; \lambda)$ заменой $\alpha \rightarrow -\alpha$ и $\lambda \rightarrow -1$, а после такой замены коэффициенты (16) полинома $A_n(t; \lambda)$ становятся коэффициентами (61) полинома $A_n(-t; \lambda)|_{\lambda=-1}$.

Теперь преобразуем ряд (59). Для этого используем равенства (18) с индексом $\nu = -1/2$, разложения функций Бесселя Z_μ^\pm в степенные ряды (19)

и формулы (60), (61). В результате получим искомый ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \Phi(\mp i|\eta|, 1/2; \xi) = \sqrt{\pi} \left(\frac{w}{2}\right)^{1/2} & \left\{ Z_{-1/2}^{\pm}(w) \pm \left(i\frac{q}{2}\right) \frac{w}{2} Z_{3/2}^{\pm}(w) + \right. \\ & + \left(i\frac{q}{2}\right)^2 w^3 \left[\pm \frac{2}{3} Z_{5/2}^{\pm}(w) + \frac{w}{8} Z_{7/2}^{\pm}(w) \right] + \\ & \left. + \left(i\frac{q}{2}\right)^3 w^4 \left[\pm Z_{7/2}^{\pm}(w) + \frac{w}{3} Z_{9/2}^{\pm}(w) \pm \frac{w^2}{48} Z_{11/2}^{\pm}(w) \right] + R_4^{\pm}(w, q) \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

Согласно выводам, сформулированным в конце п. 2.2, остаток R_4^{\pm} этого ряда убывает как $O(q^4)$, если $q \rightarrow 0+$ и $w < \infty$.

При таких же условиях формула, полученная заменой функции Куммера (57) правой частью равенства (62) в произведении (56), будет низкоэнергетической асимптотикой волновой функции Ψ^c . Обсудим физические интересные следствия такой асимптотики.

Первое следствие заключается в том, что правая часть равенства

$$\lim_{q \rightarrow 0+} \Psi^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|) / [C(\eta) \exp(i\rho \cos \varphi)] = \sqrt{\pi} \left(\frac{w}{2}\right)^{1/2} Z_{-1/2}^{\pm}(w) \quad (63)$$

является точным и физически приемлемым решением уравнения Шрёдингера (1) при нулевой энергии квантовой частицы p_1 .

Используя определение (58) функции $C(\eta)$ и предельное соотношение (63), выведем еще два следствия: в точке $r = 0$ волновая функция Ψ^c удовлетворяет равенствам

$$\Psi^c(\rho, \varphi, \eta) = C(\eta), \quad |\Psi^c(\rho, \varphi, \eta)|^2 = C^2(\eta) = \frac{\exp(-\pi\eta)}{\text{ch}(\pi\eta)}, \quad r = 0;$$

эти равенства порождают приближения

$$|\Psi^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|)|^2 \approx 2 \begin{cases} \exp(-2\pi\eta), & r = 0, \\ 1, & q \ll 1. \end{cases}$$

Полученные приближения означают, что в пределе нулевой энергии в точке $r = 0$ модуль квадрата волновой функции Ψ^c квантовой частицы p_1 быстро сходится к нулю в случае кулоновского отталкивания и имеет конечный ненулевой предел, равный двум, в случае кулоновского притяжения.

4.2. Разложение волновой функции по функциям Бесселя. Функция Куммера $\Phi(-\eta, 1/2; \xi)$ является регулярным решением следующего гипергеометрического уравнения [16]:

$$[\xi \partial_{\xi}^2 + (1/2 - \xi) \partial_{\xi} + \eta] \Phi(-\eta, 1/2; \xi) = 0.$$

Построим формальное разложение этого решения по функциям Бесселя $Z_\mu^\pm(w)$ аргумента $w \equiv \sqrt{2\xi/(iq)}$ и полуцелого порядка $\mu \geq -1/2$.

Для этого подстановкой

$$\Phi(\mp i|\eta|, 1/2; \xi) = \sqrt{\pi} \left(\frac{w}{2}\right)^{1/2} \phi^\pm(w, q), \quad \xi = iq \frac{w^2}{2}, \quad (64)$$

сведем упомянутое выше гипергеометрическое уравнение к уравнению

$$\left[\partial_w^2 + \frac{1}{w} \partial_w \mp 1 - \frac{1}{4w^2} \right] \phi^\pm(w, q) - i\frac{q}{2} (2w \partial_w + 1) \phi^\pm(w, q) = 0, \quad (65)$$

которому в случае $q = 0$ удовлетворяет функция Бесселя $Z_{-1/2}^\pm(w)$.

Затем, используя известные рекуррентные соотношения для функций Бесселя [17], убедимся в том, что уравнение (65) имеет формальное решение

$$\phi^\pm(w, q) = Z_{-1/2}^\pm(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(i\frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n+1}^{2n} (\pm 1)^{n+s} p_{ns} w^s Z_{s-1/2}^\pm(w), \quad (66)$$

если коэффициент p_{00} равен единице, а все остальные коэффициенты p_{ns} , $n = 1, 2, \dots$, подчиняются следующей рекуррентной цепочке уравнений:

$$\begin{aligned} (n+1)p_{n,s} &= 2n p_{n-1,s-1}, \quad s = n+1; \\ s p_{n,s} &= 2(s-1) p_{n-1,s-1} + p_{n-1,s-2}, \quad s = n+2, n+3, \dots, 2n-1; \\ 2n p_{n,s} &= p_{n-1,s-2} = 0, \quad s = 2n. \end{aligned}$$

Из этой цепочки следуют равенства

$$p_{12} = \frac{1}{2}; \quad p_{23} = \frac{2}{3}, \quad p_{24} = \frac{1}{8}; \quad p_{34} = 1, \quad p_{35} = \frac{1}{3}, \quad p_{36} = \frac{1}{48} \quad (67)$$

и соотношения

$$\frac{1}{2^n n!} = p_{n,2n} < p_{n,2n-1} < \dots < p_{n,n+2} < p_{n,n+1} = \frac{2^{n-1}}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (68)$$

согласно которым все коэффициенты p_{ns} положительные, а при каждом n коэффициент $p_{n,n+1}$ больше всех остальных коэффициентов p_{ns} с индексом $s > n+1$.

Теперь, применив формулы (64) и (66), запишем искомое формальное разложение функции Куммера $\Phi(-i\eta, 1/2; \xi)$ по функциям Бесселя в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\mp i\eta, 1/2; \xi) &= \sqrt{\pi} \left(\frac{w}{2}\right)^{1/2} \left\{ Z_{-1/2}^\pm(w) + T^\pm(w, q) \right\}, \\ T^\pm(w, q) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(i\frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n+1}^{2n} (\pm 1)^{n+s} p_{ns} w^s Z_{s-1/2}^\pm(w). \end{aligned} \quad (69)$$

Отметим, что благодаря равенствам (67) частичная подсумма полученного ряда (69), все слагаемые которой содержат целые степени q^n , $n = 0, 1, 2, 3$, переменной q , совпадает с рядом Маклорена (62) функции $\Phi(\mp i\eta, 1/2; \xi)$.

Докажем следующее утверждение: если $0 \leq w < \infty$ и $0 \leq q < \infty$, то ряд $T^\pm(w, q)$ сходится равномерно. Доказательство разобьем на три этапа.

Первый этап — построение мажоранты $T_1^\pm(w, q)$ модуля ряда $T^\pm(w, q)$. В ряду $T^\pm(w, q)$ заменим все функции $(iq/2)^n$ и $Z_{s-1/2}^\pm$ их модулями, а затем выполним еще две замены. При каждом n заменим все коэффициенты p_{ns} наибольшим коэффициентом $p_{n, n+1}$, который согласно формулам (68) равен $2^{n-1}/(n+1)$. Модули всех функций Бесселя $Z_\mu^-(w) = J_\mu(w)$ и $Z_\mu^+(w) = I_\mu(w)$, $\mu = s - 1/2$, заменим правыми частями соответствующих оценок (32) и (33). Полученный ряд обозначим символом T_1^\pm . Согласно выполненным преобразованиям имеем два соотношения:

$$|T^\pm(w, q)| < T_1^\pm(w, q),$$

$$T_1^\pm(w, q) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{ch } w \\ 1 \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{2w}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n+1} \sum_{s=n+1}^{2n} \left(\frac{w^2}{2} \right)^{2s} \frac{1}{\Gamma(s+1/2)}.$$

Второй этап — построение мажоранты T_2^\pm ряда T_1^\pm . На этом этапе ключевыми будут следующие известные свойства гамма-функции [17]:

$$\Gamma(s-1) = (s-2)! < \Gamma(s+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{-s} (2s-1)!!, \quad s = 2, 3, \dots$$

Преобразуем ряд T_1^\pm . Каждое число $\Gamma(s+1/2)$, $s = n+1, n+2, \dots, 2n$, заменим меньшим числом $(s-2)!$. Затем перейдем от индекса суммирования s к индексу $m = s - n - 1$. Наконец, воспользуемся неравенством $(m+n-1)! \leq (n-1)!m!$ и известным разложением экспоненциальной функции в бесконечный ряд Маклорена [13]. В итоге из ряда T_1^\pm получим мажорирующую его функцию T_2^\pm , такую что

$$T_1^\pm(w, q) < T_2^\pm(w, q) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{ch } w \\ 1 \end{array} \right\} \left(\frac{w}{2} \right)^{3/2} [1 - \exp(qw^2/2)] \exp(w^2/2).$$

Третий этап — мажорантная оценка исходного ряда T^\pm , заданного формулой (69). Согласно предыдущим этапам верны неравенства

$$|T^\pm(w, q)| < T_1^\pm(w, q) < T_2^\pm(w, q),$$

а функция T_2^\pm принимает конечные значения, если $0 \leq w \leq \infty$ и $0 \leq q \leq \infty$. Следовательно, при тех же условиях ряд T^\pm сходится равномерно, что и требовалось доказать.

Символом $T_m^\pm(w, q)$, $m = 1, 2, \dots, m < \infty$, обозначим частичную сумму ряда T^\pm , содержащую все целые степени q^n , $n = 1, 2, \dots, m$, аргумента q .

Применив изложенный выше поэтапный способ, нетрудно доказать следующее асимптотическое соотношение:

$$T^\pm(w, q) = T_m^\pm(w, q) + O(q^{m+1}), \quad q \rightarrow 0+, \quad 0 \leq w < \infty. \quad (70)$$

Завершим настоящий пункт выводом разложения волновой функции Ψ^c по функциям Бесселя и обсуждением ее низкоэнергетического приближения. Используя формулы (56) и (69), представим искомое разложение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|) = C(\eta) \exp(i\rho \cos \varphi) \sqrt{\pi} \left(\frac{w}{2}\right)^{1/2} \left\{ Z_{-1/2}^\pm(w) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(i\frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n+1}^{2n} (\pm 1)^{n+s} p_{ns} w^s Z_{s-1/2}^\pm(w) \right\}, \quad w = \sqrt{8|\eta|\rho} \sin(\varphi/2). \end{aligned} \quad (71)$$

Пусть $\Psi_m^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|)$ — конечная ($m < \infty$) подсумма этого разложения, содержащая функции q^n , $n = 0, 1, \dots$. Тогда благодаря свойству (70) ряда T^\pm верно равенство

$$\begin{aligned} \Psi^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|) = \Psi_m^c(\rho, \varphi, \pm|\eta|) + O(C(\eta) \exp(i\rho \cos \varphi) q^{m+1}), \\ q \rightarrow 0+, \quad 0 \leq \rho < \infty. \end{aligned}$$

Оно означает, что функция Ψ_m^c аппроксимирует волновую функцию Ψ^c в пределе низких энергий при условии $0 \leq \rho < \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Просуммируем основные результаты настоящей работы, полученные впервые.

Для всех регулярных волновых функций F_λ и Ψ^c двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы силовым центром выведены и исследованы разложения (36) и (71) по функциям Бесселя первого рода. Равномерная сходимость таких разложений доказана при условиях $\rho \in [0, \infty)$, $q \in [0, \infty)$. Показано, что конечные ($m < \infty$) подсуммы $F_{\lambda m}$ и Ψ_m^c таких разложений являются низкоэнергетическими ($q \rightarrow 0+$) асимптотиками функций F_λ и Ψ^c в области $\rho < \infty$.

Установлено, что низкоэнергетические асимптотики нерегулярных решений Θ_λ уравнения Кулона (3) определяются формулами (41), (49) при условии $\rho \in (0, \infty)$. Для таких решений получены формальные разложения (55), $m = \infty$, по функциям Бесселя первого и второго рода. Сходимость этих разложений в области $\rho \in (0, \infty)$ подтверждена численным анализом.

Полученные представления (36), (49) и (71) волновых функций F_λ , Θ_λ и Ψ^c предлагается использовать для теоретической обработки результатов экспериментальных исследований [21] столкновений ультрахолодных атомов и ионов в магнитооптических ловушках дискообразной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrich H. Scattering Theory // Lecture Notes in Physics. Springer, 2013. V. 872.
2. Zaslav B., Zandler M. E. // Am. J. Phys. 1967. V. 35. P. 1118.
3. Yang X. L. et al. // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 1186.
4. Guo S. H. et al. // Ibid. P. 1197.
5. Moss R. E. // Am. J. Phys. 1987. V. 55. P. 397.
6. Robnik M., Romanovski V. G. // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 7923.
7. Barton G. // Am. J. Phys. 1983. V. 51. P. 420.
8. Yafaev D. // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 6981.
9. Lin Q.-G. // Phys. Lett. A. 1999. V. 260. P. 17.
10. Dittrich W. // Am. J. Phys. 1999. V. 67. P. 768.
11. Путьшев В. В. Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы. Волновые функции и функции Грина. Препринт ОИЯИ Р4-2015-17. Дубна, 2015.
12. Путьшев В. В. Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы. Строение радиальных волновых функций. Препринт ОИЯИ Р4-2015-20. Дубна, 2015.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1967.
14. Будаг Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2002.
15. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра: Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
17. Абарамовиц М., Стигун И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
18. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1, 3. М.: Наука, 1981.
20. Fröberg C.-E. // Rev. Mod. Phys. 1955. V. 27. P. 399.
21. Idziaszek Z., Calarso T., Zoller P. // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. P. 033409.

Получено 17 августа 2015 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 21.10.2015.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,12. Уч.-изд. л. 2,59. Тираж 270 экз. Заказ № 58661.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/