

P4-2016-83

В. В. Пупышев<sup>1</sup>

КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ  
МЕДЛЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ  
В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

<sup>1</sup> E-mail: [pupyshev@theor.jinr.ru](mailto:pupyshev@theor.jinr.ru)

Пупышев В. В.

P4-2016-83

Кулоновское рассеяние медленной квантовой частицы в пространстве произвольной размерности

Считается, что заряженная квантовая частица движется в пространстве размерности  $d = 2, 3, \dots$  и рассеивается неподвижным кулоновским центром. Выведены и исследованы разложения волновой функции и всех радиальных волновых функций такой частицы по целым степеням волнового числа и функциям Бесселя вещественного порядка. Доказано, что конечные суммы таких разложений являются асимптотиками волновых функций в пределе низких энергий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2016

Pupyshev V. V.

P4-2016-83

Coulomb Scattering of a Slow Quantum Particle in a Space of Arbitrary Dimension

By assumption, a charged quantum particle moves in the space of dimension  $d = 2, 3, \dots$  and is scattered by a fixed Coulomb center. The expansions of the wave-functions and all radial wave-functions of this particle over integer powers of the wave number and the Bessel functions of real order are derived. It is proven that the finite sums of these expansions are the asymptotics of the wave-functions in the low-energy limit.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Явные представления волновой функции  $\Psi_\mu^c$  и радиальной волновой функции  $F_\lambda$  кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$  в координатном пространстве  $\mathbb{R}$  произвольной размерности  $d = 2, 3, \dots$  впервые получены в работе [1]. Низкоэнергетические асимптотики функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  известны [2] только в случае  $d = 2$ .

Главная цель настоящей работы — вывод и анализ таких асимптотик при любом  $d \geq 2$ . В разд. 1 поясняются обозначения и основные определения. В разд. 2 известные представления [1] функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  через функции Кумера [3] записываются в обозначениях, принятых в разд. 1. Раздел 3 является ключевым и посвящен построению разложений вспомогательных функций по функциям Бесселя [3]. Полученные в разд. 3 разложения используются в разд. 4 для вывода и анализа низкоэнергетических аппроксимаций волновых функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$ . В заключении перечисляются основные результаты.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Поясним используемые в настоящей работе обозначения и определения, а затем приведем соотношения, известные в теории высших трансцендентных функций [3] и в теории гипергармоник [4, 5].

Предположим, что квантовая частица  $p_1$  имеет массу  $m_1$ , обладает кулоновским зарядом  $z_1$  и движется в координатном пространстве  $\mathbb{R}^d$  некоторой размерности  $d \geq 2$ . В этом пространстве введем правую декартову систему координат  $S^d$  с начальной точкой  $O$  и единичными направляющими ортами  $e_1, e_2, \dots, e_d$ , один из которых коллинеарен волновому вектору  $\mathbf{k}_0$  начального состояния частицы  $p_1$ . Пусть  $\mathbf{r}$  — ее радиус-вектор. Используем его гиперсферические координаты  $(r, \Omega)$ , где  $r$  — гиперрадиус, а  $\Omega$  — некоторый набор всех гиперсферических углов.

Считаем, что точка  $O$  является неподвижным силовым центром, который имеет кулоновский заряд  $Z$  и воздействует на частицу  $p_1$  посредством кулоновского потенциала  $V^c(r) = z_1 Z/r$ . Символами  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}$  обозначим волновые векторы начального и конечного состояния частицы  $p_1$ , а углом ее рассеяния назовем угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{r}$ . Сохраним все принятые в работе [2] обозначения:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2m_1 E}{\hbar^2}}, & R &\equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 z_1 Z}, & q &= k|R|, & \alpha &\equiv \operatorname{sgn} R, \\ \eta &\equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q}, & & & & & & (1) \\ \rho &\equiv kr, & v &\equiv \sqrt{8|\eta|\rho}, & w &\equiv v \sin \frac{\theta}{2}, & \beta &\equiv -i\frac{q}{2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее  $\hbar$  — постоянная Планка;  $E$  — полная энергия частицы  $p_1$ , а  $k$  и  $q$  — ее размерное и безразмерное волновые числа;  $\eta$  — параметр Зоммерфельда;  $\rho$ ,  $v$  и  $w$  — безразмерные неотрицательные переменные. Согласно принятым обозначениям

$$\rho = q \frac{v^2}{4}, \quad \rho = \frac{q \omega^2}{2(1 - \cos \theta)}, \quad \nu \rho = -\beta \frac{v^2}{2}, \quad \nu \rho = -\beta \frac{w^2}{(1 - \cos \theta)}.$$

Для краткости используем символы и формулы с верхними и нижними знаками плюс и минус. В таких формулах все верхние знаки берутся в случае кулоновского отталкивания ( $\alpha = 1$ ), а все нижние — в случае кулоновского притяжения ( $\alpha = -1$ ). Символами  $Z_c^+(t)$  и  $Z_c^-(t)$  обозначим функции Бесселя  $I_c(t)$  и  $J_c(t)$ .

Согласно теории гипергармоник [4, 5] в пространстве  $\mathbb{R}$  гипергармоники  $Y_{LM}(\Omega)$  являются собственными функциями квадрата  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  оператора гипермомента  $\mathbf{L}(\Omega)$ :

$$\mathbf{L}^2 Y_{LM}(\Omega) = L(L + d - 2) Y_{LM}(\Omega), \quad L = 0, 1, \dots$$

Гипергармоники образуют полный и ортонормированный базис в пространстве функций, квадратично-суммируемых на единичной сфере  $\mathbb{S}^{d-1}$  с центром в точке  $O$ . Оператор  $-\mathbf{L}^2(\Omega)$  равен угловой части оператора Лапласа, которая часто называется оператором Лапласа–Бельтрами в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Если  $d \geq 3$ , то множество  $\mathbf{M}$  содержит все квантовые числа гипергармоники  $Y_{LM}$  за исключением гипермомента  $L$ . Число таких чисел равно  $d - 2$ . Поэтому в случае  $d = 2$  множество  $\mathbf{M}$  пустое.

В теории высших трансцендентных функций [3] функция Куммера  $\Phi(a, c; \xi)$  определяется как регулярное решение уравнения

$$[\xi \partial_\xi^2 + (c - \xi) \partial_\xi - a] \Phi(a, c; \xi) = 0. \quad (2)$$

Такое решение удовлетворяет тождеству (преобразованию) Куммера

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \exp(\xi) \Phi(c - a, c; -\xi). \quad (3)$$

Далее в качестве параметров  $a$  и функции Куммера  $\Phi(a, c; \xi)$  будем использоваться суммы, содержащие функции  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\nu$  дискретных переменных  $d$  и  $L$ . По определению

$$\mu \equiv (d - 3)/2, \quad d = 2, 3, \dots; \quad \lambda \equiv L + \mu, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1, \quad L = 0, 1, \dots$$

Поэтому  $\mu$  и  $\lambda$  — полуцелые числа при четном  $d$  и целые при нечетном  $d$ , причем  $\mu > 0$  и  $\lambda > 0$ , если  $d \geq 4$ . Два случая  $d = 2$  и  $d = 3$  являются особыми. Если  $d = 2$ , то  $\mu = -1/2$ , а  $\lambda = -1/2$  при  $L = 0$ . Если  $d = 3$ , то  $\mu = 0$ , а  $\lambda = 0$  только при  $L = 0$ .

Под низкоэнергетической асимптотикой исследуемой функции подразумеваем ее асимптотику в пределе нулевой энергии рассеяния ( $E \rightarrow 0+$ ) при фиксированных значениях отличного от нуля кулоновского параметра  $R$  и порядков  $\mu$  и  $\lambda$ . В таком пределе  $q \rightarrow 0+$ , а  $|\eta| \rightarrow \infty$ .

Если  $W$  – некоторый бесконечный ряд с общим множителем  $g$  и слагаемыми  $w_n$ , то символом  $W_m$  обозначаем конечную ( $n = 0, 1, \dots, m, m < \infty$ ) подсумму этого ряда:

$$W = g \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad W_m \equiv g \sum_{n=0}^m w^n.$$

Используем стандартные определения [3] символа Похгаммера  $(a)_n$ , гамма- и пси-функций  $\Gamma$  и  $\psi$ .

## 2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Исходными для наших исследований будут известные представления [1] полной и радиальной волновых функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  упругого кулоновского рассеяния частицы  $p_1$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$  произвольной размерности  $d \geq 2$ . Запишем такие представления в обозначениях, принятых в предыдущем разделе.

Волновая функция  $\Psi_\mu^c$  кулоновского рассеяния частицы  $p_1$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$  определяется как физически приемлемое решение  $d$ -мерного уравнения Шредингера

$$\left[ \partial_\rho^2 + \frac{d-1}{\rho} \partial_\rho - \frac{\mathbf{L}^2(\Omega)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] \Psi_\mu^c(\rho, \theta, \eta) = 0. \quad (4)$$

Такое решение является произведением

$$\Psi_\mu^c(\rho, \theta, \eta) = B_\mu(\eta) \exp(i\rho) \Phi(\mu + 1 + i\eta, \mu + 1; \xi), \quad (5)$$

в котором

$$B_\mu(\eta) \equiv \frac{\Gamma(\mu + 1 + i\eta)}{\Gamma(\mu + 1)} \exp(-\pi\eta/2), \quad \xi = i\rho(\cos \theta - 1) = \beta\omega^2. \quad (6)$$

Представление (5) после преобразования Куммера (3) принимает вид

$$\Psi_\mu^c(\rho, \theta, \eta) = B_\mu(\eta) \exp(i\rho \cos \theta) \Phi(-i\eta, \mu + 1; -\xi). \quad (7)$$

В уравнении (4) кулоновский потенциал  $2\eta/\rho$  не зависит ни от одного гиперугла из полного набора  $\Omega$ . Поэтому это уравнение подстановкой

$$\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \eta) = \rho^{-\mu-1} \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} i^{\lambda} \exp[i \delta_{\lambda}^c(\eta)] F_{\lambda}(\rho, \eta) \sum_{\mathbf{M}} Y_{L\mathbf{M}}(\Omega)$$

сводится к счетной ( $\lambda = L + \mu, L = 0, 1, \dots$ ) совокупности уравнений Кулона

$$\left[ \partial_{\rho}^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] F_{\lambda}(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty),$$

с условиями  $F_{\lambda} \sim \rho^{\lambda+1}, \rho \rightarrow 0$ , и условиями

$$F_{\lambda}(\rho, \eta) = \sin[\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta_{\lambda}^c(\eta)] + O(1/\rho), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

в которых символом  $\delta_{\lambda}^c(\eta)$  обозначен аргумент гамма-функций  $\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)$ .

Решение  $F_{\lambda}$  уравнения Кулона с такими условиями является произведением

$$F_{\lambda}(\rho, \eta) = C_{\lambda}(\eta) \rho^{\lambda+1} \exp(i\rho) \Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; \xi), \quad (8)$$

в котором

$$C_{\lambda}(\eta) \equiv 2^{\lambda} \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} \exp(-\pi\eta/2), \quad \xi = -2i\rho = \beta v^2. \quad (9)$$

Это произведение считается регулярной радиальной волновой функцией кулоновского рассеяния частицы  $p_1$  в состоянии  $|q, \lambda, \mathbf{M}\rangle$  с квантовыми числами  $q, \lambda$  и  $\mathbf{M}$ .

### 3. КЛЮЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Наша главная задача — построить низкоэнергетические асимптотики функции  $\Psi_{\mu}^c$  и  $F_{\lambda}$  в виде конечных подсумм  $\Psi_{\mu m}^c$  и  $F_{\lambda m}$  бесконечных рядов, содержащих вполне определенные коэффициенты, функции Бесселя  $Z_b^{\pm}(t)$  вещественного порядка  $b$ , целые степени  $t^s$  аргумента  $t = \omega$  или  $t = v$  и целые степени  $q^n$  волнового числа  $q$ .

Представления (5), (7) и (8), (9) обеих функций  $\Psi_{\mu}^c$  и  $F_{\lambda}$  являются произведениями кулоновских множителей  $B_{\mu}$  и  $C_{\lambda}$ , экспоненциальной функции и функции Куммера. Поэтому для вывода разложений функций  $\Psi_{\mu}^c$  и  $F_{\lambda}$  выгоднее сначала решить более общую задачу, а именно найти разложения всех элементов двух классов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , определенных соотношениями

$$\mathcal{A} \equiv \{\Phi(a + i\eta, c + 1; \xi)\}, \quad \mathcal{B} \equiv \{\exp(-\gamma\xi) \Phi(a + i\eta, c + 1; \xi)\} \quad (10)$$

и условиями

$$a \geq 0, \quad c \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \xi = \beta t^2, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Решению такой общей задачи, интересной и с точки зрения теории специальных функций, посвятим настоящий раздел.

**3.1. Разложение функции Куммера класса  $\mathcal{A}$ .** Исследуемая функция Куммера

$$\Phi(a + \nu\eta, c + 1; \xi), \quad \xi = \beta t^2,$$

удовлетворяет уравнению типа (2)

$$[\xi \partial_\xi^2 + (c + 1 - \xi) \partial_\xi - (a + \nu\eta)] \Phi(a + \nu\eta, c + 1; \xi) = 0 \quad (12)$$

и предельному соотношению

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi(a \pm \nu|\eta|, c + 1; \xi) = \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c Z_c^\pm(t). \quad (13)$$

Используя равенство  $4\nu\beta\eta = \alpha$  и подстановку

$$\Phi(a \pm \nu|\eta|, c + 1; \xi) = \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \phi^\pm(t, \beta), \quad (14)$$

сведем исходное уравнение (12) к уравнению

$$D_c^\pm(t) \phi^\pm(t, \beta) = 2\beta(t\partial_t + 2a - c)\phi^\pm(t, \beta), \quad (15)$$

содержащему оператор Бесселя

$$D_b^\pm(t) \equiv \partial_t^2 - \frac{1}{t}\partial_t \mp 1 - \frac{b}{t^2}, \quad b = c. \quad (16)$$

Как известно [3], при любом  $b$  функция Бесселя  $Z_b^+(t) \equiv I_b(t)$  или  $Z_b^-(t) \equiv J_b(t)$  принадлежит ядру оператора  $D_b^+(t)$  или  $D_b^-(t)$ :

$$D_b^\pm(t) Z_b^\pm(t) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Поэтому в случае  $\beta = 0$  уравнению (15) удовлетворяет произведение  $\phi^\pm(t, \beta = 0) = a_{00}^\pm Z_c^\pm(t)$ , в котором  $a_{00}^\pm$  — произвольный коэффициент. Формальное решение того уравнения при любом  $\beta$  будем искать в виде следующей двукратной суммы с заранее неизвестными коэффициентами  $a_{ns}^\pm$ :

$$\phi^\pm(t, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{s=n}^{2n} a_{ns}^\pm t^s Z_{c+s}^\pm(t). \quad (18)$$

Сначала выведем два вспомогательные тождества: тождество

$$D_c^\pm(t) t^s Z_{c+s}^\pm(t) \equiv 2s t^{s-1} Z_{c+s-1}^\pm(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (19)$$

и тождество

$$\begin{aligned} (t\partial_t + 2a - c) t^s Z_{c+s}^\pm(t) &\equiv \\ &\equiv t^s [2(s+a) Z_{c+s-1}^\pm(t) \pm t Z_{c+s+1}^\pm(t)], \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для этого запишем

$$\begin{aligned} D_c^\pm(t) t^s Z_{c+s}^\pm(t) &= t^s D_{c+s}^\pm(t) Z_{c+s}^\pm(t) + \\ &+ 2st^{s-1} \left[ \partial_t Z_{c+s}^\pm(t) + \frac{c+s}{t} Z_{c+s}^\pm(t) \right], \end{aligned}$$

затем воспользуемся тождеством (17),  $b = c + s$ , и известным соотношением [3]

$$\partial_t Z_{c+s}^\pm(t) = Z_{c+s-1}^\pm(t) - \frac{c+s}{t} Z_{c+s}^\pm(t).$$

В итоге получим тождество (19). Применив известное представление [3]

$$\partial_t Z_{c+s}^\pm(t) = \frac{c+s}{t} Z_{c+s}^\pm(t) \pm Z_{c+s+1}^\pm(t),$$

убедимся в справедливости тождества (20).

Теперь в уравнении (15) заменим функцию  $\phi^\pm$  ее разложением (18). Затем, используя тождества (17), (19) и (20), запишем полученное уравнение в виде уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n A_n^\pm(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

в котором

$$A_1^\pm(t) = (a_{11}^\pm - 2aa_{00}^\pm) Z_c^\pm(t) + (2a_{12}^\pm \mp a_{00}^\pm) t Z_{c+1}^\pm(t), \quad (22)$$

а все остальные ( $n \geq 2$ ) функции  $A_n^\pm(t)$  – конечные суммы:

$$\begin{aligned} A_n^\pm(t) &\equiv 2na_{n,2n}^\pm t^{2n-1} + S_n^\pm(t), \quad S_n^\pm(t) \equiv \sum_{s=n}^{2n-1} R_{ns}^\pm(t), \\ R_{ns}^\pm(t) &\equiv t^s \{ [sa_{ns}^\pm - 2(a+s-1)a_{n-1,s-1}^\pm(t)] \times \\ &\times t^{-1} Z_{c+s-1}^\pm(t) \mp a_{n-1,s-1}^\pm Z_{c+s}^\pm(t) \}. \end{aligned} \quad (23)$$



В уравнении (21) все степенные функции  $\beta^n$ ,  $n \geq 1$ , волнового числа  $q$  линейнонезависимые. Поэтому это уравнение имеет и притом только одно решение тогда и только тогда, когда  $A_n^\pm(t) \equiv 0$  при любом  $n \geq 1$  и любом  $t \geq 0$ . Покажем, что все такие тождества окажутся справедливыми, если подчинить коэффициенты  $a_{ns}^\pm$  вполне определенным условиям.

Начнем с функции  $A_1^\pm$ . Эта функция — линейная комбинация (22) двух линейнонезависимых функции  $Z_c^\pm(t)$  и  $tZ_{c+1}^\pm(t)$ . Значит,  $A_1^\pm(t) \equiv 0$  только тогда, когда

$$a_{11}^\pm - 2a_{00}^\pm = 0, \quad 2a_{12}^\pm \mp a_{00}^\pm = 0. \quad (24)$$

Теперь, используя формулы (23), исследуем функцию  $A_n^\pm(t)$  с некоторым номером  $n \geq 2$ . Упростим сумму  $S_n^\pm$ . Для этого преобразуем ее слагаемые  $R_{ns}^\pm$ , последовательно увеличивая их номер  $s$  на единицу. В представлении функции  $R_{ns}^\pm$  с номером  $s = n$  положим равным нулю коэффициент перед функцией  $t^{-1}Z_{c+s-1}^\pm$ :

$$sa_{ns}^\pm - 2(a+s-1)a_{n-1,s-1}^\pm = 0, \quad s = n. \quad (25)$$

Тогда функция  $R_{ns}^\pm$ ,  $s = n$ , примет более простой вид:

$$R_{ns}^\pm = \mp a_{n-1,s-1}^\pm t^s Z_{c+s}^\pm, \quad s = n.$$

Прибавим ее к функции  $R_{n,s+k}^\pm$ ,  $s = n$ ,  $k = 1$ , и запишем полученную сумму в виде

$$R_{n,s+1}^\pm + R_{ns}^\pm = t^{s+1} \left\{ [(s+1)a_{n,s+1}^\pm - 2(a+s)a_{n-1,s}^\pm \mp a_{n-1,s-1}^\pm] t^{-1} Z_{c+s}^\pm \mp a_{n-1,s}^\pm Z_{c+s+1}^\pm \right\}.$$

В такой сумме коэффициент перед функцией  $t^{-1}Z_{c+s}^\pm$ ,  $s = n$ , подчиним условию

$$(s+1)a_{n,s+1}^\pm - 2(a+s)a_{n-1,s}^\pm \mp a_{n-1,s-1}^\pm = 0. \quad (26)$$

Тогда будет верно равенство

$$R_{n,s+1}^\pm + R_{ns}^\pm = \mp a_{n-1,s}^\pm t^{s+1} Z_{c+s+1}^\pm, \quad s = n.$$

Используя его, прибавим обе функции  $R_{n,s+1}^\pm$  и  $R_{ns}^\pm$  к функции  $R_{n,s+k}^\pm$ ,  $s = n$ ,  $k = 2$ . В сумме трех таких функций коэффициент перед функцией  $t^{-1}Z_{c+s+1}^\pm$  положим равным нулю. Таким образом получим условие (26),  $s = n + 1$ , и представление

$$R_{n,s+2}^\pm + R_{n,s+1}^\pm + R_{ns}^\pm = \mp a_{n-1,s+1}^\pm t^{s+2} Z_{c+s+2}^\pm, \quad s = n.$$

Продолжим построение. Последовательно увеличиваем индекс  $k$  на единицу с трех до  $2n - 1$ . Для каждого значения  $k$  налагаем условие (26),  $s = n + k$ . В итоге для суммы  $S_n^\pm$  всех слагаемых  $R_{ns}^\pm$  получаем представление

$$S_n^\pm = \mp a_{n-1,2n-2}^\pm t^{2n-1} Z_{c+2n-1}^\pm.$$

Благодаря такому представлению и определениям (23)

$$A_n^\pm(t) = (2na_{n,2n}^\pm \mp a_{n-1,2n-2}^\pm) t^{2n-1} Z_{c+2n-1}^\pm.$$

Следовательно,  $A_n^\pm(t) \equiv 0$  тогда и только тогда, когда

$$2na_{ns}^\pm \mp a_{n-1,s-2}^\pm = 0, \quad s = 2n. \quad (27)$$

Итак, если при каждом  $n = 1, 2, \dots$  выполняются условия (24)–(27), то в сумме (21) все функции  $A_n^\pm(t)$  тождественно равны нулю и поэтому ряд (18) формально удовлетворяет уравнению (15). Правая часть равенства (14), в которой функция  $\phi^\pm$  представлена таким рядом, подчиняется предельному соотношению (13) только тогда, когда коэффициент  $a_{00}^\pm$  равен единице. Примем это условие и запишем все условия (24)–(27) в виде уравнений для коэффициентов  $a_{ns}^+$ :

$$sa_{ns}^+ = 2(a + s - 1)a_{n-1,s-1}^+ + a_{n-1,s-2}^+ \quad (28)$$

и уравнений для коэффициентов  $a_{ns}^-$ :

$$sa_{ns}^- = 2(a + s - 1)a_{n-1,s-1}^- - a_{n-1,s-2}^-. \quad (29)$$

В этих уравнениях  $n = 1, 2, \dots$ , при каждом  $n$  полагается  $s = n, n + 1, \dots, 2n$ , и подразумевается, что  $a_{00}^\pm = 1$  и  $a_{nm}^\pm = 0$ , если  $m < n$  или  $m > 2n$ .

Расположим уравнения (28) и (29) в порядке возрастания индекса  $n$  и в порядке возрастания индекса  $s$  при каждом  $n$ . Таким образом получим две рекуррентные по обоим индексам цепочки уравнений. Решение  $a_{ns}^\pm$  каждого уравнения представится линейной комбинацией решений  $a_{n-1,s-1}^\pm$  и  $a_{n-1,s-2}^\pm$  предыдущих уравнений. Поэтому при любом значении параметра  $a$  обсуждаемые цепочки (28) и (29) имеют и притом единственные и нетривиальные решения.

Заменив в формуле (14) функцию  $\phi^\pm$  рядом (18), получим следующее формальное разложение функции Куммера класса  $\mathcal{A}$ :

$$\Phi(a \pm i|\eta|, c + 1; \xi) = \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{s=n}^{2n} a_{ns}^\pm t^s Z_{c+s}^\pm(t), \quad (30)$$

$$\xi = \beta t^2, \quad \beta = -i\frac{q}{2}.$$

**3.2. Коэффициенты разложений функций класса  $\mathcal{A}$ .** Настоящий пункт посвятим анализу свойств коэффициентов  $a_{ns}^\pm$ .

Заметим, что цепочка уравнений (28) после замены всех ее неизвестных  $a_{mp}^+$  произведениями  $(-1)^{m+p} a_{mp}^-$  становится цепочкой (29). Следовательно,

$$a_{ns}^- = (-1)^{n+s} a_{ns}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = n, n+1, \dots, 2n. \quad (31)$$

Поэтому достаточно исследовать только коэффициенты  $a_{ns}^+$ .

Напомним, что по определению (10), (11) класса  $\mathcal{A}$  параметр  $a$  может принимать лишь неотрицательные значения. Очевидно, что в рассматриваемом случае  $a \geq 0$  все коэффициенты  $a_{ns}^+$ , подчиненные системе уравнений (25), положительные. Например,

$$\begin{aligned} a_{00}^+ &= 1; \quad a_{11}^+ = 2a, \quad a_{12}^+ = \frac{1}{2}; \quad a_{22}^+ = 2a(a+1), \quad a_{23}^+ = a + \frac{2}{3}, \quad a_{24}^+ = \frac{1}{8}; \\ a_{33}^+ &= \frac{4}{3} a(a+1)(a+2), \quad a_{34}^+ = a^2 + \frac{7}{3}a + 1, \quad a_{35}^+ = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}, \quad a_{36}^+ = \frac{1}{48}. \end{aligned} \quad (32)$$

При любом целом  $n$  первое ( $s = n$ ) и последнее ( $s = 2n$ ) уравнения (25) и (27) системы (28) содержат только два коэффициента  $a_{n,n}^+$ ,  $a_{n-1,n-1}^+$  и  $a_{n,2n}^+$ ,  $a_{n-1,2(n-1)}^+$ . Поэтому верны равенства

$$a_{nn}^+ = \frac{2^n}{n!} (a)_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

и равенства

$$a_{n,2n}^+ = \frac{1}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (34)$$

Действительно, последовательно уменьшая индекс  $n$  на единицу в уравнении (25) и выражая каждый раз коэффициент  $a_{n-k,n-k}^+$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , через предыдущий коэффициент  $a_{n-k-1,n-k-1}^+$ , получаем

$$\begin{aligned} a_{nn}^+ &= 2 \frac{a+n-1}{n} a_{n-1,n-1}^+ = \\ &= 2 \frac{a+n-1}{n} 2 \frac{a+n-2}{n-1} a_{n-2,n-2}^+ = \dots = \frac{2^n}{n!} (a)_n a_{00}^+. \end{aligned}$$

Таким же способом, но из уравнения (27) выводим равенства

$$a_{n,2n}^+ = \frac{1}{2n} a_{n-1,2(n-1)}^+ = \frac{1}{2n} \frac{1}{2(n-1)} a_{n-2,2(n-2)}^+ = \dots = \frac{1}{2^n n!} a_{00}^+.$$

Докажем следующее утверждение: уравнениям (28) удовлетворяют произведения

$$a_{ns}^+ = \frac{2^s}{s!} (a)_s h_{ns}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = n + p, \quad p = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (35)$$

содержащие  $p$ -кратные суммы

$$h_{n,n+p} = \sum_{k_1=2p-1}^{n+p-1} \zeta_{k_1} \sum_{k_2=2p-3}^{k_1-2} \zeta_{k_2} \sum_{k_3=2p-5}^{k_2-2} \zeta_{k_3} \dots \dots \sum_{k_{p-2}=5}^{k_{p-3}-2} \zeta_{k_{p-2}} \sum_{k_{p-1}=3}^{k_{p-2}-2} \zeta_{k_{p-1}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-2} \zeta_{k_p}, \quad (36)$$

в которых

$$\zeta_k \equiv \frac{1}{4} \frac{k}{(a+k)(a+k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n+p-1. \quad (37)$$

Приступим к доказательству. Подстановкой (35) сведем все исходные уравнения (28) к следующей цепочке уравнений для искомым коэффициентов  $h_{ns}$ :

$$h_{ns} = h_{n-1,s-1} + \frac{s-1}{4} \frac{h_{n-1,s-2}}{(a+s-1)(a+s-2)}, \quad (38)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad s = n, n+1, \dots, 2n.$$

Положим  $s = n + p$ ; считаем, что  $p = 1, 2, \dots, n - 1$ ; фиксируем значения индексов  $n$  и  $p$ . Исследуем конечную подсистему цепочки уравнений (38), определяющую все коэффициенты  $h_{n-k,n+p-k}$  с номером  $k = 0, 1, \dots, n - p - 1$ . Запишем такие уравнения в порядке возрастания индекса  $k$ . Первым ( $k = 0$ ) уравнением будет уравнение

$$h_{n,n+p} = h_{n-1,n+p-1} + \frac{1}{4} \frac{(n+p-1)h_{n-1,n+p-2}}{(a+n+p-1)(a+n+p-2)}. \quad (39)$$

Каждое ( $k = 0, 1, \dots, n - p - 2$ ) предыдущее уравнение окажется суммой

$$h_{n-k,n+p-k} = h_{n-k-1,n+p-k-1} + \frac{1}{4} \frac{(n+p-k-1)h_{n-k-1,n+p-k-2}}{(a+n+p-k-1)(a+n+p-k-2)}, \quad (40)$$

первое слагаемое  $h_{n-k-1,n+p-k-1}$  которой будет суммой

$$h_{n-k-1,n+p-k-1} = h_{n-k-2,n+p-k-2} + \frac{1}{4} \frac{(n+p-k-2)h_{n-k-2,n+p-k-3}}{(a+n+p-k-2)(a+n+p-k-3)}. \quad (41)$$

Последнее ( $k = n - p - 1$ ) уравнение запишется как

$$h_{p+1,2p+1} = h_{p,2p} + \frac{p}{2} \frac{h_{p,2p-1}}{(a+2p)(a+2p-1)}. \quad (42)$$

Теперь последовательно уменьшим значение индекса  $k$  от  $n - p + 1$  до нуля с шагом, равным единице, и на каждом шаге слагаемое  $h_{n-k-1, n+p-k-1}$  суммы (40) заменим суммой (41). В итоге для коэффициента  $h_{n, n+p}$  получим следующее представление:

$$h_{n, n+p} = h_{p, 2p} + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n-p} \frac{(n+p-m) h_{n-m, n+p-m-1}}{(a+n+p-m)(a+n+p-m-1)}. \quad (43)$$

Исключим из него слагаемое  $h_{p, 2p}$ . Согласно равенствам (34) и (35) имеем

$$h_{p, 2p} = \frac{(2p)!}{p!} \frac{2^{-3p}}{(a)_{2p}}, \quad h_{p-1, 2p-2} = \frac{(2p-2)!}{(p-1)!} \frac{2^{-3p+3}}{(a)_{2p-2}}.$$

Следовательно, верны соотношения

$$\begin{aligned} h_{p, 2p} &= \frac{1}{4} \frac{(2p-1)h_{p-1, 2p-2}}{(a+2p-1)(a+2p-2)} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(n+p-m) h_{n-m, n+p-m-1}}{(a+n+p-m)(a+n+p-m-1)} \Big|_{m=n-p+1}, \end{aligned}$$

которые означают, что в формуле (43) коэффициент  $h_{p, 2p}$  равен слагаемому суммы по индексу  $m$  при  $m = n - p + 1$ . Поэтому из этой формулы следует представление

$$h_{n, n+p} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n-p+1} \frac{(n+p-m) h_{n-m, n+p-m-1}}{(a+n+p-m)(a+n+p-m-1)}.$$

Упростим его. Положив  $k_1 = n + p - m$  и используя обозначение (37), получаем

$$h_{n, n+p} = \sum_{k_1=2p-1}^{n+p-1} \zeta_{k_1} h_{k_1-p, k_1-1}. \quad (44)$$

При любых целых индексах  $m$  и  $k_m$  имеет место тождество

$$h_{k_m-p+(m-1), k_m-1} \equiv h_{k_m-p+(m-1), k_m-p+(m-1)+p-m}.$$

Поэтому левая часть равенства (44) окажется коэффициентом  $h_{k_m-p+(m-1), k_m-1}$  после замены в этом равенстве  $n \mapsto k_m - p + (m - 1)$ ,

$p \mapsto p - m$  и  $k_1 \mapsto k_m$ . Следовательно, при любом  $m = 1, 2, \dots, p - 1$  и любом  $k_m > 1$

$$h_{k_m - p + (m-1), k_m - 1} = \sum_{k_{m+1}=2p-(2m+1)}^{k_m-2} \zeta_{k_{m+1}} h_{k_{m+1}-(p-m), k_{m+1}-1}, \quad (45)$$

которое в случае  $m = p - 1$  содержит под знаком суммы коэффициенты  $h_{k_p-1, k_p-1}$  с равными друг другу индексами. Согласно формулам (33) и (35) все такие коэффициенты равны единице. Значит, в этом случае

$$h_{k_{p-1}-2, k_{p-1}-1} = \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-2} \zeta_{k_p} h_{k_p-1, k_p-1} = \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-2} \zeta_{k_p}. \quad (46)$$

Теперь в представлении (44) заменим все коэффициенты  $h_{k_1-p, k_1-1}$  правыми частями равенств (45) с номером  $m = 1$ . В результате искомые коэффициенты  $h_{n, n+p}$  станут двукратными суммами

$$h_{n, n+p} = \sum_{k_1=2p-1}^{n+p-1} \zeta_{k_1} \sum_{k_2=2p-3}^{k_1-2} \zeta_{k_2} h_{k_2-p, k_2-1}.$$

В этих суммах заменим все коэффициенты  $h_{k_2-p, k_2-1}$  суммами (45) с номером  $m = 2$ . Продолжим построение: при каждом  $m = 3, 4, \dots, p - 2$  коэффициенты  $h_{k_m - p + (m-1), k_m - 1}$  представим соответствующими суммами (45), а в оставшемся случае  $m = p - 1$  заменим все коэффициенты  $h_{k_{p-1}-2, k_{p-1}-1}$  суммами (46). В результате получим равенство (36), которое и требовалось доказать.

Для примера запишем доказанное представление (35), (37) при  $p = 1, 2$ . Если  $p = 1$ , то  $a_{n, n+p}^+$  — однократная сумма

$$a_{n, n+1}^+ = \frac{2^{n-1}}{(n+1)!} (a)_{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(a+k)(a+k-1)}.$$

Если  $p = 2$ , то  $a_{n, n+p}^+$  — двукратная сумма:

$$a_{n, n+2}^+ = \frac{2^{n-2}}{(n+2)!} (a)_{n+2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k}{(a+k)(a+k-1)} \sum_{m=1}^{k-2} \frac{m}{(a+m)(a+m-1)}.$$

Теперь исследуем два особо важных случая  $a = 0$  и  $a = 1$ .

*Случай  $a = 0$ .* Только в этом случае  $(a)_n = 0$  при любом  $n = 1, 2, \dots$  и согласно равенствам (33) все коэффициенты  $a_{n_s}^+$  с номером  $s = n \geq 1$  равны

нулю. Поэтому при любом целом  $n$  система уравнений (28) вырождается в систему

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n,n+1}^+ &= 2na_{n-1,n}^+, & s &= n+1, & n &> 1; \\ sa_{ns}^+ &= 2(s-1)a_{n-1,s-1}^+ + a_{n-1,s-2}^+, & s &= n+2, n+3, \dots, 2n-1; \\ 2na_{n,2n}^+ &= a_{n-1,2(n-1)}^+, & s &= 2n, \end{aligned} \quad (47)$$

а равенства (32) порождают равенства

$$\begin{aligned} a_{00}^+ &= 1; & a_{11}^+ &= 0, & a_{12}^+ &= \frac{1}{2}; & a_{22}^+ &= 0, & a_{23}^+ &= \frac{2}{3}, & a_{24}^+ &= \frac{1}{8}; \\ a_{33}^+ &= 0, & a_{34}^+ &= 1, & a_{35}^+ &= \frac{1}{3}, & a_{36}^+ &= \frac{1}{48}. \end{aligned} \quad (48)$$

Из уравнений (47) с индексом  $s = n+1$  и  $s = 2n$  следуют формулы

$$a_{n,n+1}^+ = \frac{2^{n-1}}{n+1}, \quad a_{n,2n}^+ = \frac{1}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

В рассматриваемом случае ( $a = 0$ ) формулы (37), становятся равенствами

$$\zeta_k|_{a=0} = \frac{1}{4(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n+p-1.$$

Поэтому при любом  $n = 1, 2, \dots$  и любом  $p = 2, 3, \dots, n$  представления (35), (36) заметно упрощаются и сводятся к равенству

$$\begin{aligned} a_{n,n+p}^+ &= \frac{2^{n-p}}{n+p} \sum_{k_1=2p-2}^{n+p-2} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=2p-4}^{k_1-2} \frac{1}{k_2} \sum_{k_3=2p-6}^{k_2-2} \frac{1}{k_3} \dots \\ &\dots \sum_{k_{p-3}=6}^{k_{p-4}-2} \frac{1}{k_{p-3}} \sum_{k_{p-2}=4}^{k_{p-3}-2} \frac{1}{k_{p-2}} \sum_{k_{p-1}=2}^{k_{p-2}-2} \frac{1}{k_{p-1}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Из этого равенства при  $p = 1$  и  $p = 2$  имеем

$$\begin{aligned} a_{n,n+2}^+ &= \frac{2^{n-2}}{n+2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \frac{2^{n-2}}{n+2} [\psi(1+n) - 1 + \gamma_e], \\ a_{n,n+3}^+ &= \frac{2^{n-3}}{n+3} \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k} \sum_{m=2}^{k-2} \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

где  $\psi$  и  $\gamma_e$  — известные пси-функция и константа Эйлера [3].

Случай  $a = 1$ . Только в этом случае  $(a)_n = n!$ , а коэффициент  $a + s - 1$  равен  $s$ . Поэтому при любом  $n \geq 1$  система уравнений (28) становится системой

$$sa_{ns}^+ = 2sa_{n-1,s-1}^+ + a_{n-1,s-2}^+, \quad n = 1, 2, \dots \quad s = n, n+1, \dots, 2n, \quad (51)$$

а из равенств (32) следуют равенства

$$\begin{aligned} a_{00}^+ = 1; \quad a_{11}^+ = 2, \quad a_{12}^+ = \frac{1}{2}; \quad a_{22}^+ = 4, \quad a_{23}^+ = \frac{5}{3}, \quad a_{24}^+ = \frac{1}{8}; \\ a_{33}^+ = 8, \quad a_{34}^+ = \frac{13}{3}, \quad a_{35}^+ = \frac{7}{12}, \quad a_{36}^+ = \frac{1}{48}. \end{aligned} \quad (52)$$

Благодаря уравнениям (51) с индексом  $s = n$  и  $s = 2n$  верны два представления:

$$a_{nn}^+ = 2^n, \quad a_{n,2n}^+ = \frac{1}{2^{n_n!}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (53)$$

В рассматриваемом случае ( $a = 1$ ) согласно определению (37)

$$\zeta_k|_{a=1} = \frac{1}{4(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n+p-1.$$

Поэтому при  $n = 1, 2, \dots$  и  $p = 1, 2, \dots, n$  представление (35) вырождается в равенство

$$\begin{aligned} a_{n,n+p}^+ = 2^{n-p} \sum_{k_1=2p}^{n+p} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=2p-2}^{k_1-2} \frac{1}{k_2} \sum_{k_3=2p-4}^{k_2-2} \frac{1}{k_3} \dots \\ \dots \sum_{k_{p-2}=6}^{k_{p-3}-2} \frac{1}{k_{p-2}} \sum_{k_{p-1}=4}^{k_{p-2}-2} \frac{1}{k_{p-1}} \sum_{k_p=2}^{k_{p-1}-2} \frac{1}{k_p}, \end{aligned} \quad (54)$$

из которого в случаях  $p = 1$  и  $p = 2$  следуют два соотношения:

$$a_{n,n+1}^+ = 2^{n-1} [\psi(2+n) - 1 + \gamma_e], \quad a_{n,n+2}^+ = 2^{n-2} \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k} \sum_{m=2}^{k-2} \frac{1}{m}.$$

**3.3. Разложения функций класса  $\mathcal{B}$ .** Построим разложение произведения функций  $\exp(-\beta\gamma t^2)$  и  $\Phi(a \pm i|\eta|, c+1; \xi)$ ,  $\xi = \beta t^2$ , принадлежащее множеству  $\mathcal{B}$ , определенному формулами (10) и (11). Для этого применим метод, подробно изложенный в п. 3.1. Сначала запишем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} [\exp(\beta\gamma t^2) \Phi(a \pm i|\eta|, c+1; \xi)] = \Gamma(c+1) \left(\frac{2}{t}\right)^c Z_c^\pm(t). \quad (55)$$



Затем, используя оператор  $D_c^\pm$ , заданный формулой (16), и подстановку

$$\Phi(a \pm i|\eta|, c + 1; \xi) = \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \exp(\beta\gamma t^2) \psi^\pm(t, \beta, \gamma), \quad (56)$$

сведем уравнение Куммера (12) к уравнению

$$D_c^\pm(t)\psi^\pm = 2\beta[(1 - 2\gamma)t\partial_t + (2a - c - 2\gamma)]\psi^\pm + 4\beta^2\gamma(1 - \gamma)\psi^\pm.$$

Наконец, докажем, что этому уравнению формально удовлетворяет ряд

$$\psi^\pm(t, \beta, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sum_{s=n}^{2n} b_{ns}^\pm t^s Z_{c+s}^\pm(t), \quad (57)$$

коэффициенты  $b_{ns}^\pm$ , которого однозначно определяются цепочкой уравнений

$$sb_{ns}^\pm = 2[a - 1 + \gamma(1 - c) + (1 - 2\gamma)s]b_{n-1, s-1}^\pm \pm (1 - 2\gamma)b_{n-1, s-2}^\pm + 2\gamma(1 - \gamma)[2(c + s - 1)b_{n-2, s-2}^\pm \pm b_{n-2, s-3}^\pm]. \quad (58)$$

В этой цепочке  $n = 1, 2, \dots$ , при каждом  $n$  полагается  $s = n, n + 1, \dots, 2n$  и подразумевается, что  $b_{00}^\pm = 1$ , а  $b_{nm}^\pm = 0$ , если  $m < n$  или  $m > 2n$ .

Стоит отметить, что для вывода трех цепочек уравнений (28), (29) и (58) ключевыми являются тождество (19) и условие равенства нулю коэффициента перед каждой функцией  $t^{-1}Z_{c+s}^\pm$  с номером  $s = n + 1, \dots, 2n - 1$ .

Теперь, используя формулы (56) и (57) и следующие из уравнений (58) равенства

$$b_{ns}^- = (-1)^{n+s} b_{ns}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = n, n + 1, \dots, 2n,$$

запишем искомое разложение в виде разложения

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\gamma t^2) \Phi(a \pm i|\eta|, c + 1, \xi) &= \\ &= \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \sum_{n=0}^{\infty} (\pm\beta)^n \sum_{s=n}^{2n} b_{ns}^\pm (\pm t)^s Z_{c+s}^\pm(t), \end{aligned} \quad (59)$$

в котором  $\beta = -iq/2$  и  $\xi = \beta t^2$ .

#### 3.4. Коэффициенты разложений функций класса $\mathcal{B}$ в особом случае.

Настоящий пункт посвятим выводу явных представлений коэффициентов  $b_{ns}^\pm$  в особом случае  $2\gamma = 1$ ,  $2a = c + 1$ . В этом случае уравнения (58) принимают вид

$$2sb_{ns}^\pm = 2(c + s - 1)b_{n-2, s-2}^\pm \pm b_{n-2, s-3}^\pm, \quad (60)$$

где  $s = n, n+1, \dots, 2n$  при каждом  $n = 1, 2, \dots$  и по определению  $b_{00}^{\pm} = 1$ , а  $b_{nm}^{\pm} = 0$ , если  $m < n$  или  $m > 2n$ .

Приступим к исследованию уравнений (60). Каждое из них содержит три искомого коэффициента  $b_{n,s}^{\pm}$ ,  $b_{n-2,s-2}^{\pm}$  и  $b_{n-2,s-3}^{\pm}$ . Если  $n$  – нечетное число, то и  $n-2$  – нечетное; при любом четном  $n$  число  $n-2$  – четное. Следовательно, вся цепочка обсуждаемых уравнений (60) распадается на две независимые друг от друга, но рекуррентные цепочки. В первой цепочке индекс  $n$  принимает только нечетные значения ( $n = 1, 3, \dots$ ), а во второй цепочке индекс  $n$  равен четному числу ( $n = 2, 4, \dots$ ). Согласно уравнениям (60) коэффициенты  $b_{11}^{\pm}$  и  $b_{12}^{\pm}$  равны нулю. Поэтому первая цепочка имеет только тривиальное решение:  $b_{ns}^{\pm} = 0$  при  $n = 1, 3, \dots$  и любом  $s$ . Вторая цепочка содержит ненулевой коэффициент  $b_{00}^{\pm} = 1$  и поэтому имеет нетривиальное решение. Представим эту цепочку в наиболее удобном для ее исследования виде. Для этого в исходных уравнениях (60) сделаем замену  $n \mapsto 2n$  и положим  $d_{ns}^{\pm} = b_{2n,s}^{\pm}$ . В результате получим искомую цепочку уравнений

$$2sd_{ns}^{\pm} = 2(c+s-1)d_{n-1,s-2}^{\pm} \pm d_{n-1,s-3}^{\pm}, \quad (61)$$

в которых  $s = 2n, 2n+1, \dots, 4n$  при каждом  $n = 1, 2, \dots$  и по определению  $d_{00}^{\pm} = 1$ , а  $d_{nm}^{\pm} = 0$ , если выполнено условие  $m < 2n$  или условие  $m > 4n$ . Благодаря этим условиям все коэффициенты  $d_{ns}^{\pm}$  с индексом  $s \geq 3n+1$  равны нулю. Поэтому далее полагаем  $s = 2n, 2n+1, \dots, 3n$  для каждого целого  $n$ , а все коэффициенты  $d_{nm}^{\pm}$  считаем равными нулю, если  $m < 2n$  или  $m > 3n$ .

Приведем вспомогательные соотношения, обусловленные строением уравнений (61). Согласно этим уравнениям коэффициенты  $d_{ns}^{-}$  и  $d_{ns}^{+}$  связаны простым образом:

$$d_{ns}^{-} = (-1)^s d_{ns}^{+}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = 2n, 2n+1, \dots, 3n. \quad (62)$$

Поэтому достаточно исследовать только коэффициенты  $d_{ns}^{+}$ . При условии  $c \geq 0$ , указанном в списке ограничений (11), все коэффициенты  $d_{ns}^{+}$  положительные. Например,

$$\begin{aligned} d_{00}^{+} &= 1; & d_{12} &= \frac{c+1}{2}, & d_{13}^{+} &= \frac{1}{6}; \\ d_{24}^{+} &= \frac{1}{8}(c+1)(c+3), & d_{25}^{+} &= \frac{1}{60}(5c+11), & d_{26}^{+} &= \frac{1}{72}. \end{aligned} \quad (63)$$

В двух случаях  $s = 2n$  и  $s = 3n$  все коэффициенты  $d_{ns}^{+}$  определяются довольно просто. В случае  $s = 2n$  уравнение (61) является равенством

$$2nd_{n,2n}^{\pm} = (c+2n-1)d_{n-1,2n-2}^{\pm},$$

благодаря которому

$$d_{n,2n}^+ = \frac{(c+2n-1)!!}{2^n n! (c-1)!!}, \quad (0)!! = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (64)$$

В случае  $s = 3n$  уравнение (61) вырождается в уравнение

$$6nd_{n,3n}^\pm = d_{n-1,3n-3}^\pm,$$

из которого следует, что

$$d_{n,3n}^+ = \frac{1}{6^n n!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (65)$$

Докажем следующее утверждение: уравнениям (61) удовлетворяют произведения

$$r_{ns}^+ = \frac{(c+s-1)!!}{s!!} r_{ns}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = 2n+p, \quad p = 1, 2, \dots, n-1, \quad (66)$$

содержащие  $p$ -кратные суммы

$$\begin{aligned} r_{n,2n+p} = & \frac{1}{(c-1)!!} \sum_{k_1=p-1}^{n-1} \chi_{k_1,p} \sum_{k_2=p-2}^{k_1-1} \chi_{k_2,p-1} \sum_{k_3=p-3}^{k_2-1} \chi_{k_3,p-2} \dots \times \\ & \times \dots \sum_{k_{p-2}=2}^{k_{p-3}-1} \chi_{k_{p-2},3} \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}-1} \chi_{k_{p-1},2} \sum_{k_p=0}^{k_{p-1}-1} \chi_{k_p,1}, \quad (67) \end{aligned}$$

в которых

$$\chi_{kp} \equiv \frac{1}{2} \frac{(2k+p)!!}{(2k+p-1)!!} \frac{(c+2k+p-2)!!}{(c+2k+p+1)!!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (68)$$

Доказательство выполним по аналогии с выводом соотношений (35) и (36), подробно изложенным в п. 3.2. Подстановкой (66) сведем все исходные уравнения (61) к следующей цепочке уравнений для искоемых коэффициентов  $r_{ns}$ :

$$r_{ns} = r_{n-1,s-2} + \frac{1}{2} \frac{(s-2)!!}{(s-3)!!} \frac{(c+s-4)!!}{(c+s-1)!!} r_{n-1,s-3}. \quad (69)$$

В этой цепочке  $s = 2n, 2n+1, \dots, 3n$  при каждом  $n = 1, 2, \dots$ . Фиксируем значения индексов  $n$  и  $s$ . Введем матрицу  $\mathbf{Q}$  с элементами

$$Q_{sk} \equiv \frac{1}{2} \frac{(s-2k-2)!!}{(s-2k-3)!!} \frac{(c+s-2k-4)!!}{(c+s-2k-1)!!}, \quad k = 0, 1, \dots, 3n-s-1. \quad (70)$$

Исследуем конечную подсистему цепочки уравнений (69), определяющую все коэффициенты  $r_{n-k, s-2k}$ . Такую подсистему образуют уравнения

$$r_{n-k, s-2k} = r_{n-k-1, s-2k-2} + Q_{sk} r_{n-k-1, s-2k-3}$$

с номером  $k = 0, 1, \dots, 3n - s - 1$ . Запишем такие уравнения в порядке возрастания номера  $k$ . Затем, начиная с предпоследнего уравнения, в каждом предыдущем уравнении заменим коэффициент  $r_{n-k-1, s-2k-2}$  правой частью последующего уравнения. В итоге получим уравнение

$$r_{ns} = r_{s-2n, 3s-6n} + \sum_{k=0}^{3n-s-1} Q_{sk} r_{n-k-1, s-2k-3},$$

которое подстановкой  $s = 2n + p$  приведем к уравнению

$$r_{n, 2n+p} = r_{p, 3p} + \sum_{k=0}^{n-p-1} Q_{2n+p, k} r_{n-k-1, 2n+p-2k-3}, \quad (71)$$

содержащему коэффициент  $r_{p, 3p}$ . Используя формулы (65), (66) и (70), найдем этот коэффициент и коэффициент  $r_{p-1, 3(p-1)}$ . Затем запишем три равенства:

$$\begin{aligned} r_{p, 3p} &= \frac{(3p)!!}{(c+3p)!!} \frac{1}{6^p p!} = Q_{2n+p, n-p} r_{p-1, 3(p-1)} = \\ &= Q_{2n+p, k} r_{n-k-1, 2n+p-2k-3} \Big|_{k=n-p}, \end{aligned}$$

которые означают, что в формуле (71) коэффициент  $r_{p, 3p}$  равен слагаемому суммы по индексу  $k$  при  $k = n - p$ . Следовательно, эту формулу можно представить равенством

$$r_{n, 2n+p} = \sum_{k=0}^{n-p} Q_{2n+p, k} r_{n-k-1, 2n+p-2k-3}.$$

В этом равенстве перейдем к индексу суммирования  $k_1 = n - k - 1$ , затем согласно определениям (68) и (70) положим  $Q_{2n+p, k_1} = \chi_{k_1 p}$  и в итоге получим представление

$$r_{n, 2n+p} = \sum_{k_1=p-1}^{n-1} \chi_{k_1 p} r_{k_1, 2k_1+(p-1)}, \quad (72)$$

вследствие которого при  $m = 0, 1, \dots, p - 1$  и  $k_m = 1, 2, \dots$  верно равенство

$$r_{k_m, 2k_m+p-m} = \sum_{k_{m+1}=p-m-1}^{k_m-1} \chi_{k_{m+1}, p-m} r_{k_{m+1}, k_{m+1}+p-m-1}. \quad (73)$$

В случае  $m = p - 1$  такое равенство содержит под знаком суммы коэффициенты  $r_{k_p, 2k_p}$ . Согласно формулам (64) и (66) все такие коэффициенты равны  $1/(c - 1)!!$ . Значит, в этом случае

$$r_{k_{p-1}, 2k_{p-1}+1} = \sum_{k_p=0}^{k_{p-1}-1} \chi_{k_p, 1} r_{k_p, 2k_p} = \frac{1}{(c - 1)!!} \sum_{k_p=0}^{k_{p-1}-1} \chi_{k_p, 1}. \quad (74)$$

Теперь выполним следующие преобразования. В формуле (72) заменим все коэффициенты  $r_{k_1, 2k_1+p-1}$  правыми частями равенств (73) с номером  $m = 1$ . В результате искомые коэффициенты  $r_{n, 2n+p}$  станут двукратными суммами, содержащими коэффициенты  $r_{k_2, k_2+p-2}$ . Заменим эти коэффициенты соответствующими суммами (73),  $m = 2$ . Продолжим построение: при каждом  $m = 3, 4, \dots, p - 2$  коэффициенты  $r_{k_m, 2k_m+p-m}$  представим соответствующими суммами (73), а в оставшемся случае  $m = p - 1$  заменим все коэффициенты  $r_{k_{p-1}, 2k_{p-1}+1}$  суммами (74). В результате получим равенство (67), которое и требовалось доказать.

#### 4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

В настоящем разделе решим следующую задачу: используя ключевые разложения (30), (59), построить и исследовать низкоэнергетические асимптотики всех волновых функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$ , заданных формулами (5), (7) и (8), (9). Правые части этих формул содержат произведения экспоненциальной функции и функции Куммера. При вполне определенном выборе параметров  $a$ ,  $c$ ,  $\gamma$  и аргумента  $t$  такие произведения становятся элементами класса  $\mathcal{B}$ , а их сомножители, равные функциям Куммера, принадлежат классу  $\mathcal{A}$ . Следовательно, для функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  нетрудно построить формальные разложения двух типов. По определению разложение первого типа содержит экспоненциальный множитель, а в разложении второго типа такой множитель отсутствует. Чтобы получить разложения первого типа, в представлениях (5) и (8) функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  заменим функции Куммера соответствующими рядами (30). Разложения второго типа выведем из тех же представлений, но для этого заменим в них произведения экспоненциальной функции и функции Куммера соответствующими рядами (59). Для доказательства равномерной сходимости всех полученных разложений функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  воспользуемся результатами работы [2]. Такую сходимость проиллюстрируем вычислениями в физически наиболее интересном случае трехмерного ( $d = 3$ ,  $\mu = 0$ ) кулоновского рассеяния.

**4.1. Асимптотики волновой функции.** Сначала применим установленные в п 3.3 свойства коэффициентов  $a_{ns}^\pm$ . В разложении (30) выразим коэффициенты  $a_{ns}^-$  через коэффициенты  $a_{ns}^+$  и получим справедливое при любом  $a \geq 0$

разложение

$$\Phi(a \pm i|\eta|, c + 1; \xi) = \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \sum_{n=0}^{\infty} (\pm\beta)^n \sum_{s=n}^{2n} a_{ns}^+ (\pm t)^s Z_{c+s}^{\pm}(t). \quad (75)$$

Только при  $a = 0$  это разложение благодаря равенствам  $a_{00}^+ = 1$  и  $a_{nn}^+ = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\pm i|\eta|, c + 1; \xi) &= \\ &= \Gamma(c + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^c \left[ Z_c^{\pm}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm\beta)^n \sum_{s=n+1}^{2n} a_{ns}^+ (\pm t)^s Z_{c+s}^{\pm}(t) \right]. \quad (76) \end{aligned}$$

Теперь для волновой функции  $\Psi_{\mu}^c$  выведем два разложения первого типа.

В представлении (5) функции  $\Psi_{\mu}^c$  имеется функция Куммера  $\Phi(\mu + i\eta, \mu + 1; \xi)$ . Согласно определениям (1), (6) и (11) такая функция Куммера будет рядом (75), если выполнены условия  $a = \mu + 1$  и

$$c = \mu, \quad \beta = -i\frac{q}{2}, \quad \xi = \beta t^2, \quad t = \omega = \sqrt{8\rho|\eta|} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (77)$$

Примем все эти условия. В формуле (5) представим функцию  $\Phi(\mu + i\eta, \mu + 1; \xi)$  в виде ряда (75) и таким образом получим искомое разложение первого типа

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \pm i|\eta|) &= B_{\mu}(\eta) \Gamma(\mu + 1) \exp(i\rho) \times \\ &\times \left(\frac{2}{w}\right)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mp i\frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n}^{2n} a_{ns}^+ (\pm w)^s Z_{\mu+s}^{\pm}(w). \quad (78) \end{aligned}$$

Все коэффициенты  $a_{ns}^+$  этого разложения можно вычислить по формулам (28), (32)–(34) или (35)–(37). Перед вычислением в этих формулах нужно положить  $a = \mu + 1$ . В случае  $d = 3$ ,  $\mu = 0$ ,  $a = 1$  все коэффициенты  $a_{ns}^+$  определяются более простыми соотношениями (51)–(53) и (54).

Теперь вместо представления (5) функции  $\Psi_{\mu}^c$  используем ее представление (7) через функцию Куммера  $\Phi(-i\eta, \mu + 1; -\xi)$ . Чтобы построить разложение такой функции Куммера, используем формулы (76) и (77) и выполним замену  $\eta \mapsto -\eta$ ,  $\xi \mapsto -\xi$ , которая равносильна комплексному сопряжению. В равенстве (7) представим функцию  $\Phi(-i\eta, \mu + 1; -\xi)$  ее построенным разложением и в итоге для волновой функции  $\Psi_{\mu}^c$  получим еще одно разложение

первого типа

$$\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) = \Gamma(\mu + 1) B_{\mu}(\eta) \exp(i\rho \cos \theta) \left(\frac{2}{w}\right)^{\mu} [Z_{\mu}^{\pm}(w) + T_{\mu}^{\pm}(w, q)],$$

$$T_{\mu}^{\pm}(w, q) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\pm i \frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n+1}^{2n} a_{ns}^{+} (\pm w)^s Z_{\mu+s}^{\pm}(w). \quad (79)$$

Коэффициенты  $a_{ns}^{+}$  этого разложения нетрудно вычислить по формулам (47)–(49) или (50). Цепочка уравнений (47), определяющих коэффициенты  $a_{ns}^{+}$ , не зависит ни от каких параметров. Поэтому коэффициенты  $a_{ns}^{+}$  являются универсальными в следующем смысле: при любой размерности  $d$  пространства  $\mathbb{R}$  разложение (79) волновой функции  $\Psi_{\mu}^c$  содержит одни и те же коэффициенты  $a_{ns}^{+}$ . В работе [2] эти коэффициенты обозначались символами  $p_{ns}$  и была доказана равномерная сходимость ряда  $T^{\pm} \equiv T_{\mu}^{\pm}$  в области  $\rho < \infty$ . Следовательно, при любых  $\mu = (d - 3)/2$  и  $\rho < \infty$  разложение (79) сходится равномерно. Значит, в области  $\rho < \infty$  любая, но конечная ( $n = 0, 1, \dots, m < \infty$ ) подсумма

$$\Psi_{\mu m}^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) \equiv \Gamma(\mu + 1) B_{\mu}(\eta) \exp(i\rho \cos \theta) \left(\frac{2}{w}\right)^{\mu} \times$$

$$\times \left[ Z_{\mu}^{\pm}(w) + \sum_{n=1}^m \left(\pm i \frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n+1}^{2n} a_{ns}^{+} (\pm w)^s Z_{\mu+s}^{\pm}(w) \right]$$

этого разложения является низкоэнергетической асимптотикой функции  $\Psi_{\mu}^c$ :

$$\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) = \Psi_{\mu m}^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) + O(B_{\mu}(\eta) \exp(i\rho \cos \varphi) q^{m+1}),$$

$$q \rightarrow 0, \quad \rho < \infty.$$

В этой асимптотике по определению двойная сумма равна нулю, если  $m = 0$ .

Теперь для волновой функции  $\Psi_{\mu}^c$  выведем и исследуем разложение второго типа. Для этого в цепочке уравнений (58) и равенстве (59) положим

$$a = \mu + 1, \quad c = \mu, \quad \xi = \beta t^2, \quad t = \omega, \quad \gamma = \frac{1}{1 - \cos \theta}, \quad i\rho = -\beta \gamma t^2$$

и, таким образом, получим представление произведения функций  $\exp(i\rho)$  и  $\Phi(\mu + 1 + i\eta, \mu + 1; \xi)$  в виде бесконечного ряда. Используя это представление и формулы (5), (6), определяющие волновую функцию  $\Psi_{\mu}^c$ , запишем ее искомое разложение в виде

$$\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) =$$

$$= B_{\mu}(\eta) \Gamma(\mu + 1) \left(\frac{2}{w}\right)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mp i \frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n}^{2n} b_{ns}^{+}(\vartheta) (\pm w)^s Z_{\mu+s}^{\pm}(w). \quad (80)$$

В этом разложении функции  $b_{ns}^+(\vartheta)$  косинуса  $\vartheta$  угла рассеяния  $\theta$  определяются цепочкой уравнений, которая порождена уравнениями (58) и устроена довольно сложно:

$$sb_{ns}^+ = \frac{2}{\vartheta - 1} [(1 + \vartheta)(s - 1) + (\mu + 1)\vartheta] b_{n-1, s-1}^+ + \frac{\vartheta + 1}{\vartheta - 1} b_{n-1, s-2}^+ - \frac{2\vartheta}{(\vartheta - 1)^2} [2(\mu + s - 1) b_{n-2, s-2}^+ + b_{n-2, s-3}^+]. \quad (81)$$

Здесь  $s = n, n + 1, \dots, 2n$  при каждом целом  $n$ , при любом  $\vartheta \in [-1, 1)$  считается, что  $b_{00}^+(\vartheta) \equiv 1$ , а  $b_{nm}^+(\vartheta) \equiv 0$ , если  $m < n$  или  $m > 2n$ .

Численный анализ цепочки уравнений (81) затруднен тем, что при любых  $n$  и  $s$  функции  $b_{ns}^+(\vartheta)$  имеют полюс порядка  $n$  в точке  $\vartheta = 1$ , соответствующей нулевому углу рассеяния  $\theta$ . Вместо функций  $b_{ns}^+(\vartheta)$  выгоднее использовать всюду непрерывные функции  $t_{ns}(\vartheta)$ . Определим такие функции через функции  $b_{ns}^+(\vartheta)$ . Для этого в представлении (80) и во всех уравнениях (81) положим

$$b_{ns}^+(\vartheta) = (-1)^n \frac{t_{ns}(\vartheta)}{(1 - \vartheta)^n}, \quad \vartheta \in [-1, 1).$$

В результате получим разложение

$$\Psi_\mu^c(\rho, \theta, \pm|\eta|) = B_\mu(\eta) \Gamma(\mu + 1) \times \left(\frac{2}{w}\right)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\pm \frac{iq}{2(1 - \vartheta)}\right]^n \sum_{s=n}^{2n} t_{ns}(\vartheta) (\pm w)^s Z_{\mu+s}^\pm(w) \quad (82)$$

и цепочку ( $n = 1, 2, \dots, s = n, n + 1, \dots$ ) уравнений

$$st_{ns} = 2[s - 1 + (s + \mu)\vartheta] t_{n-1, s-1} + (1 + \vartheta)t_{n-1, s-2} - 2\vartheta [2(\mu + s - 1)t_{n-2, s-2} + t_{n-2, s-3}], \quad (83)$$

в которой  $t_{00}(\vartheta) \equiv 1$  и полагается  $t_{nm}(\vartheta) \equiv 0$ , если  $m < n$  или  $m > 2n$ .

Отметим, что из уравнений (83) следуют равенства

$$t_{11}(\vartheta) = 2(\mu + 1)\vartheta, \quad t_{12}(\vartheta) = \frac{1}{2}(1 + \vartheta); \quad t_{22} = 2(\mu + 1)(\mu + 2)\vartheta^2, \\ t_{23}(\vartheta) = \frac{1}{3}[2 + (3\mu + 5)(1 + \vartheta)\vartheta], \quad t_{24} = \frac{1}{8}(1 + \vartheta)^2$$

и равенства

$$t_{nn}(\vartheta) = \frac{2^n}{n!} (\mu + 1)_n \vartheta^n, \quad t_{n, 2n}(\vartheta) = \frac{1}{2^n n!} (1 + \vartheta)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$



Единственное значение  $\theta = \pi/2$  угла рассеяния  $\theta$  является особым в следующем смысле: только при таком значении  $\vartheta \equiv \cos \theta = 0$ , и поэтому все уравнения (83) вырождаются в цепочку ( $n = 1, 2, \dots, s = n, n+1, \dots, 2n$ ) уравнений

$$st_{ns}(\vartheta) = 2(s-1)t_{n-1,s-1}(\vartheta) + t_{n-1,s-2}(\vartheta), \quad \vartheta = 0.$$

Заменой  $t_{ns}(\vartheta) \mapsto a_{ns}^+$  эти уравнения сводятся к исследованным в п. 3.2 уравнениям (47). Следовательно, если  $\vartheta = 0$ , то все коэффициенты  $t_{n,n+p}(\vartheta)$  с индексом  $p = 1, 2, \dots, n$  являются суммами (50), а все коэффициенты  $t_{nn}(\vartheta)$  равны нулю. Поэтому при  $\vartheta = 0$  разложение (82) вырождается в разложение (79).

Как упоминалось выше, разложение (79) волновой функции  $\Psi_\mu^c$  сходится равномерно при любых  $\mu$  и  $\rho < \infty$ . Следовательно, оба разложения (78) и (82) этой же функции обладают таким же свойством. Поэтому любые конечные подсуммы  $\Psi_{\mu m}^c$  этих разложений (82) можно использовать как низкоэнергетические ( $q \rightarrow 0$ ) асимптотики волновой функции  $\Psi_\mu^c$  в области  $\rho < \infty$ .

**4.2. Асимптотики радиальных волновых функций.** Для радиальной волновой функции  $F_\lambda$  выведем разложение первого типа.

Согласно обозначениям (1) и определению (10), (11) класса  $\mathcal{A}$  при условиях

$$a = \lambda + 1, \quad c = 2\lambda + 1, \quad \xi = \beta t^2, \quad t = v \quad (84)$$

функция Куммера  $\Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2, \xi)$ , содержащаяся в представлении (8) функции  $F_\lambda$ , окажется рядом (30). Следовательно, для каждой функции  $F_\lambda$  имеет место следующее разложение первого типа:

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) \Gamma(2\lambda + 2) \exp(i\rho) \frac{v}{2} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mp i \frac{q}{2}\right)^n \sum_{s=n}^{2n} a_{ns}^+ (\pm v)^s Z_{2\lambda+1+s}^\pm(v). \quad (85)$$

Все коэффициенты  $a_{ns}^+$  этого разложения подчиняются уравнениям (28) и вычисляются по формулам (32)–(34) и (35)–(37), в которых  $a = \lambda + 1$ . По определению  $\lambda = L + (d-3)/2$ , где  $L = 0, 1, \dots$ . Поэтому только случае  $d = 3$  и  $L = 0$  индекс  $\lambda$  равен нулю, а параметр  $a = \lambda + 1$  равен единице. Следовательно, в обсуждаемом случае и ни в каком другом все коэффициенты  $a_{ns}^+$  разложения (85) удовлетворяют уравнениям (51) и определяются соотношениями (52)–(54).

Теперь для каждой функции  $F_\lambda$  выведем разложение второго типа.

Примем все условия (84) и положим  $\gamma = 1/2$ . Заметим, что из равенств  $a = \lambda + 1$  и  $c = 2\lambda + 1$  следует равенство  $2c = a + 1$ . Согласно обозначениям (1)

и определению (10), (11) класса  $\mathcal{B}$  произведение функций  $\exp(i\rho)$  и  $\Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; \xi)$ ,  $\xi = \beta v^2$ , содержащееся в представлении (8) функции  $F_\lambda$ , будет элементом класса  $\mathcal{B}$ , причем в особом случае  $2\gamma = 1$ ,  $c = 2a + 1$ .

Этот случай подробно исследовался в п. 3.4. Напомним некоторые результаты из этого пункта. В разложении (59) все коэффициенты  $b_{ns}^\pm$  с нечетным индексом  $n$  равны нулю. При редукции уравнений (60) к уравнениям (61) использовалась замена  $n \mapsto 2n$  и подстановка  $b_{2n,s}^\pm = d_{ns}^\pm$ . Коэффициенты  $d_{ns}^+$  и  $d_{ns}^-$  удовлетворяют равенствам (62).

Благодаря перечисленным выше свойствам коэффициентов  $b_{ns}^\pm$  и  $d_{ns}^\pm$  в рассматриваемом особом случае  $2\gamma = 1$ ,  $2a = c + 1$  исходное разложение (59) можно представить в виде разложения

$$\begin{aligned} \exp(-\beta t^2/2) \Phi(a \pm i|\eta|, 2a; \xi) &= \\ &= \Gamma(c+1) \left(\frac{2}{t}\right)^{2a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \sum_{s=2n}^{3n} d_{ns}^+ (\pm t)^s Z_{2a+s-1}^\pm(t). \end{aligned}$$

Используя такое разложение, представление (8) и равенства  $\beta = -iq/2$ ,  $i\rho = -\beta v^2/2$ ,  $\xi = \beta v^2$ , получим искомое разложение второго типа:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) &= q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) \Gamma(2\lambda + 2) \frac{v}{2} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(-i\frac{q}{2}\right)^{2n} \sum_{s=n}^{2n} d_{ns}^+ (\pm v)^s Z_{2\lambda+1+s}^\pm(v). \quad (86) \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов  $d_{ns}^+$  этого разложения можно использовать уравнения (61) или явные представления (63)–(68), в которых  $c = 2\lambda + 1$ .

Обсудим представление (86). Для этого подстановкой

$$c = \nu = 2\lambda + 1, \quad d_{ns}^+ = \frac{b_{ns}}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = n, n+1, \dots, 2n,$$

сведем его к известному (см. [2]), но полученному другим способом разложению

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) \Gamma(\nu + 1) \frac{v}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{q^2}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} (\pm v)^s Z_{\nu+s}^\pm(v).$$

Как показано в работе [2], при условии  $\rho < \infty$  такое разложение сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, исходное разложение (86), а значит, и разложение (85) обладают таким же свойством. Поэтому при условии  $\rho < \infty$  любые, но конечные подсуммы  $F_{\lambda m}$  разложений (85) и (86) являются искомыми низкоэнергетическими асимптотиками функции  $F_\lambda$ .

**4.3. Численный анализ приближений волновых функций.** Как показано в предыдущих пп. 4.1 и 4.2, волновые функции  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  являются бесконечными рядами (78), (79), (82) и (85), (86). Предложим и реализуем метод, позволяющий оценить относительную точность приближения таких рядов их конечными подсуммами  $\Psi_{\mu m}^c$  и  $F_{\lambda m}$ . В этом методе функции  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$ , вычисленные по формулам (5), (7) и (8), (9), сравниваются с подсуммами  $\Psi_{\mu m}^c$  и  $F_{\lambda m}$ . Для такого сравнения используются функции  $K_{\mu m}$ ,  $L_{\mu m}$  или  $D_{\lambda m}$ , близкие к десятичному логарифму относительной точности приближения  $\Psi_\mu^c \approx \Psi_{\mu m}^c$  или приближения  $F_\lambda \approx F_{\lambda m}$ .

Для анализа сходимости рядов (78) и (79) предлагается использовать функцию

$$K_{\mu m}(w, \eta, \varepsilon) \equiv \log \frac{|\Psi_\mu^c(\rho, \theta, \eta) - \Psi_{\mu m}^c(\rho, \theta, \eta)| + \varepsilon}{|\Psi_\mu^c(\rho, \theta, \eta)| + \varepsilon},$$

$$\rho = \frac{qw^2}{2(1 - \cos \theta)} \quad \varepsilon > 0.$$

Эта функция в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0+$  становится десятичным логарифмом относительной точности приближения  $\Psi_\mu^c \approx \Psi_{\mu m}^c$ , а при достаточно малом значении  $\varepsilon$  близка к такой точности.

Рис. 1 иллюстрирует сходимость ряда (79) в случаях трехмерного ( $d = 3$ ,  $\mu = 0$ ) отталкивающего ( $q = 0, 1$ ,  $\eta = 5$ ) и притягивающего ( $q = 0, 1$ ,  $\eta = -5$ ) кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$ . На рис. 1 изображены графики трех ( $m = 0, 2, 5$ ) функций  $K_{\mu m}(w, \eta, \varepsilon)$ ,  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-14}$ . Как видно, на отрезке  $0 \leq w \leq 5$  относительная точность приближения  $\Psi_\mu^c \approx \Psi_{\mu m}^c$  довольно быстро улучшается с увеличением числа  $m$ .

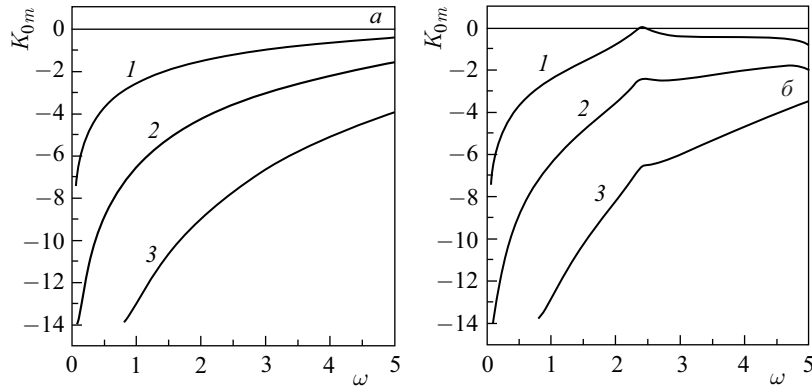


Рис. 1. Графики функций  $K_{0m}(w, \eta, \varepsilon)$  для разложения (79),  $\varepsilon = 10^{-14}$ ,  $m = 0, 2, 5$ , — кривые 1, 2 и 3: а)  $\eta = 5$ , б)  $\eta = -5$

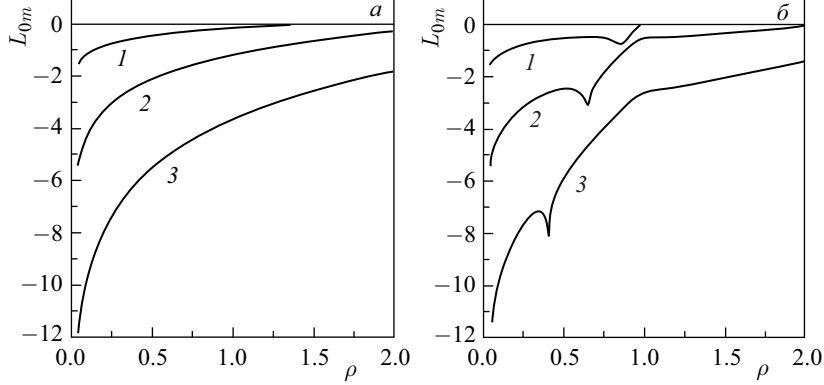


Рис. 2. Графики функций  $L_{0m}(\rho, \theta, \eta, \epsilon)$ ,  $\epsilon = 10^{-14}$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $m = 0, 2, 5$ , — кривые 1, 2 и 3: а)  $\eta = 5$ , б)  $\eta = -5$

Результаты расчета функции  $K_{\mu m}$ ,  $\mu = 0$ , подтвердили быструю сходимость разложения (78) на отрезке  $0 \leq w \leq 5$  в обоих случаях:  $\eta = 5$  и  $\eta = -5$ .

Для исследования сходимости ряда (82) удобно использовать функцию

$$L_{\mu m}(\rho, \theta, \eta, \epsilon) \equiv \log \frac{|\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \eta) - \Psi_{\mu m}^c(\rho, \theta, \eta)| + \epsilon}{|\Psi_{\mu}^c(\rho, \theta, \eta)| + \epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

Для примера эта функция вычислялась в случае  $\theta = \pi/4$  и при тех же значениях  $\mu$ ,  $m$ ,  $\eta$  и  $\epsilon$ , что и функция  $K_{\mu m}$ . Результаты вычислений представлены на рис. 2 в виде графиков, иллюстрирующих сходимость частичных сумм  $\Psi_{\mu m}^c$  ряда (82),  $\mu = 0$ , к этому ряду с ростом числа  $m$  при условии  $\rho \leq 5$ .

Для исследования сходимости обоих разложений (85) и (86) радиальной волновой функции  $F_{\lambda}$  выгодно вычислять функцию

$$D_{\lambda m}(\rho, \eta, \epsilon) \equiv \log \frac{|F_{\lambda}(\rho, \eta) - F_{\lambda m}(\rho, \eta)| + \epsilon}{|F_{\lambda}(\rho, \eta)| + \epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (87)$$

Функция  $D_{\lambda m}$  равна нулю в точке  $\rho = 0$  и имеет локальный максимум или локальный минимум в той точке, в которой функция  $F_{\lambda}$  или разность функций  $F_{\lambda}$  и  $F_{\lambda m}$  обращается в нуль. При достаточно малом, но положительном значении аргумента  $\epsilon$  обсуждаемая функция  $D_{\lambda m}$  близка к десятичному логарифму относительной точности аппроксимации  $F_{\lambda} \approx F_{\lambda m}$ .

Рисунок 3 дает наглядное представление об относительной точности приближения функции  $F_{\lambda}$  конечной подсуммой  $F_{\lambda m}$  разложения (85). На этом рисунке изображены графики трех ( $m = 0, 2, 5$ ) функций  $D_{\lambda m}(\rho, \eta, \epsilon)$ ,  $\epsilon =$

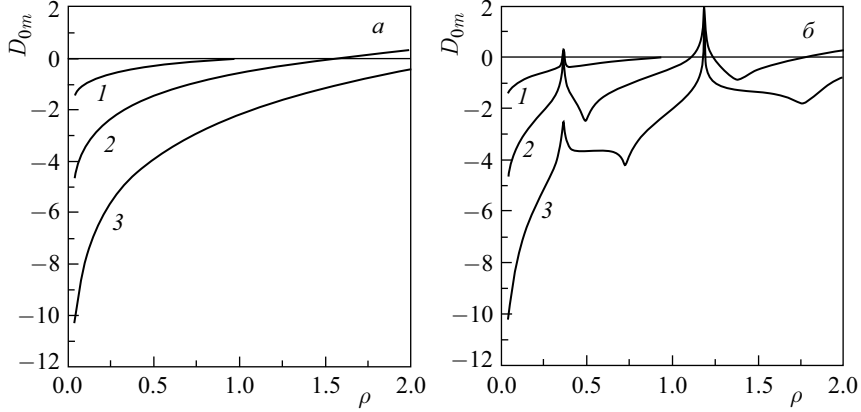


Рис. 3. Графики функций  $D_{0m}(\rho, \eta, \varepsilon)$  для разложения (85),  $\varepsilon = 10^{-14}$ ,  $m = 0, 2, 5$ , — кривые 1, 2 и 3: а)  $\eta = 5$ , б)  $\eta = -5$

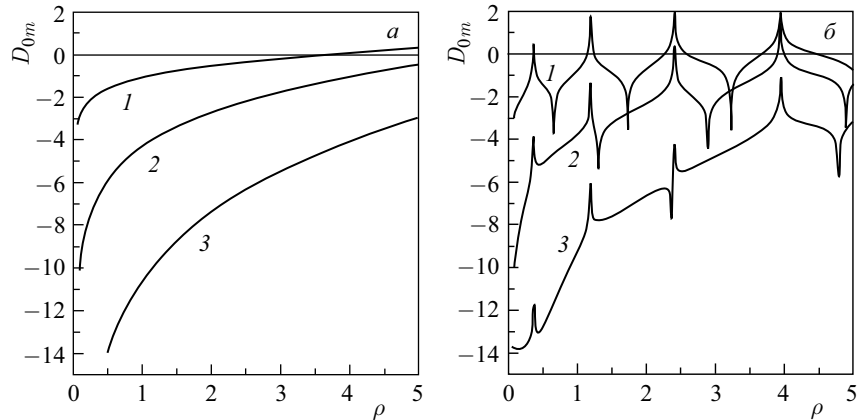


Рис. 4. Графики функций  $D_{0m}(\rho, \eta, \varepsilon)$  для разложения (86),  $\varepsilon = 10^{-14}$ ,  $m = 0, 2, 5$ , — кривые 1, 2 и 3: а)  $\eta = 5$ , б)  $\eta = -5$

$10^{-14}$ ,  $\eta = \pm 5$ , вычисленные в случае трехмерного кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$  в состоянии  $|q, \lambda\rangle$  с нулевым угловым моментом  $\lambda = 0$ .

Для иллюстрации сходимости разложения (86) функции  $D_{\lambda m}(\rho, \eta, \varepsilon)$ ,  $m = 0, 2, 5$ , вычислялись в случае  $\varepsilon = 10^{-14}$ ,  $\eta = \pm 5$  и  $\lambda = 0$ . Графики таких функций начерчены на рис. 4.

Обсужденные в настоящем пункте результаты численного анализа бесконечных разложений (78), (79), (82) и (85), (86) подтверждают равномерную сходимость этих разложений в области  $\rho < \infty$ .

**4.4. Асимптотики кулоновских множителей и парциальных фаз.** Выведем и обсудим низкоэнергетические ( $q \rightarrow 0$ ,  $|\eta| \rightarrow \infty$ ) асимптотики кулоновской фазы  $\delta_\lambda^c$  и множителей  $B_\mu$  и  $C_\lambda$ , заданных формулами (6) и (9). В качестве ключевых равенств используем известные свойства гамма-функции [3]:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad |\Gamma(1/2 + i\eta)| = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\eta)}}, \quad |\Gamma(i\eta)| = \sqrt{\frac{\pi\eta}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}}, \quad (88)$$

формулу Муавра  $t = |t| \exp(\arg t)$  и формулу Стирлинга

$$\Gamma(t) = \sqrt{2\pi} \exp[-t + (t-1/2) \ln t] (1 + O(t^{-1})), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\arg t| < \pi.$$

По определению фаза  $\delta_\lambda^c$  равна аргументу гамма-функции  $\Gamma(t)$  переменной

$$t \equiv \lambda + 1 + i\eta = \sqrt{(\lambda+1)^2 + \eta^2} \exp\left[i \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda+1}\right].$$

В рассматриваемом пределе модуль переменной  $t$  неограниченно возрастает. Поэтому можно применить формулу Стирлинга и затем получить искомую асимптотику

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \left\{ \frac{\eta}{2} \ln [(\lambda+1)^2 + \eta^2] - \eta + \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda+1} \right\} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\eta}\right) \right]. \quad (89)$$

Заметим, что слагаемое этой асимптотики, содержащее арктангенс, обращается в нуль только в случае  $\lambda = -1/2$ , который реализуется лишь при  $d = 2$ .

Теперь из определения (6) множителя  $B_\mu$  выведем два представления. Для этого символами  $\delta_\mu(\eta)$  и  $\tilde{\delta}_\mu(\eta)$  обозначим аргумент функции  $\Gamma(\mu+1+i\eta)$  и правую часть равенства (89) в случае  $\lambda = \mu$ . Затем воспользуемся формулой Муавра и свойствами (88). В итоге при четном  $d$  получим представление

$$B_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\exp(i\delta_\mu(\eta))}{\sqrt{\exp(2\pi\eta) + 1}} \prod_{k=1}^{\mu+1/2} [(\mu+1-k)^2 + \eta^2]^{1/2}$$

а при нечетном  $d$  – представление

$$B_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2\pi\eta}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\exp(i\tilde{\delta}_\mu(\eta))}{\sqrt{\exp(2\pi\eta) - 1}} \prod_{k=1}^{\mu} [(\mu+1-k)^2 + \eta^2]^{1/2}.$$

Из таких представлений следуют искомые асимптотики:

$$B_\mu(\eta) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu+1)} |\eta|^{\mu+1/2} \exp(i\tilde{\delta}_\mu(\eta)) \begin{cases} \exp(-\pi\eta), & \eta \rightarrow \infty, \\ (-2\pi\eta)^p, & \eta \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

в которых по определению  $p = 0$  при четном  $d$  и  $p = -1/2$  при нечетном  $d$ .

Асимптотику множителя  $C_\lambda$  найдем тем же способом, который использовался для вывода асимптотики множителя  $B_\mu$ . В силу свойств (88) из определения (9) этого множителя следует, что

$$C_\lambda(\eta) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2\lambda+2)} |2\eta|^{\lambda+1/2} \begin{cases} \exp(-\pi\eta), & \eta \rightarrow \infty, \\ (-2\pi\eta)^p, & \eta \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где  $p = 0$  при четном  $d$  и  $p = -1/2$  при нечетном  $d$ .

Отметим одну особенность найденных асимптотик множителей  $B_\mu$  и  $C_\lambda$ : в случае кулоновского притяжения ( $\eta < 0$ ) эти асимптотики содержат множитель  $(-2\pi\eta)^p$ , равный единице при четном  $d$  и функции  $(-2\pi\eta)^{-1/2}$  при нечетном  $d$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Просуммируем основные результаты настоящей работы, полученные впервые. Для всех регулярных волновых функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  кулоновского рассеяния квантовой частицы  $p_1$  в пространстве  $\mathbb{R}$  произвольной размерности  $d = 2, 3, \dots$  выведены и исследованы разложения (78), (79), (82) и (85), (86) по функциям Бесселя первого рода. Доказано и подтверждено вычислениями следующее утверждение: конечные подсуммы  $\Psi_{\mu m}^c$  и  $F_{\lambda m}$  таких разложений являются низкоэнергетическими ( $q \rightarrow 0$ ) асимптотиками функций  $\Psi_\mu^c$  и  $F_\lambda$  в области  $\rho < \infty$ . Для числовых коэффициентов  $a_{n,s}^+$ ,  $d_{n,s}^+$  и функций  $b_{n,s}^+(\vartheta)$ ,  $t_{n,s}(\vartheta)$ , содержащихся в таких асимптотиках, выведены и исследованы рекуррентные системы линейных алгебраических уравнений (28), (61) (81), (83) и явные представления (35)–(37) и (66)–(68) в виде многократных, но конечных сумм.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yafaev D. // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 6981.
2. Пупышев В. В. // ТМФ. 2016. Т. 188. С. 49.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
4. Джибути Р. И., Шитикова К. В. Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.
5. Avery J. Hyperspherical Harmonics, Application in Quantum Theory. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

Получено 25 ноября 2016 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 02.02.2017.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,48. Тираж 245 экз. Заказ № 59020.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)