

P6-2021-6

Р. С. Мухин<sup>\*</sup>, В. Н. Душин<sup>1</sup>, А. В. Еремин<sup>2</sup>,  
И. Н. Изосимов, А. В. Исаев, А. И. Свирихин<sup>2</sup>

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
НЕЙТРОНОВ СПОНТАННОГО ДЕЛЕНИЯ  
ПО МНОЖЕСТВЕННОСТЯМ  
МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

---

<sup>1</sup> Радиевый институт им. В. Г. Хлопина, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

\* E-mail: rmukhin@jinr.ru

Мухин Р. С. и др.

P6-2021-6

Восстановление спектров распределения нейтронов спонтанного деления по множественностям методом статистической регуляризации

Предложена техника восстановления распределения нейтронов спонтанного деления по множественностям с использованием метода регуляризации Тихонова. Приведены сравнения распределений, полученных в данной работе для  $^{252}\text{No}$ ,  $^{244}\text{Fm}$ ,  $^{246}\text{Fm}$  и  $^{248}\text{Cm}$ , с ранее восстановленными распределениями. Распределения по множественностям нейтронов спонтанного деления  $^{250}\text{No}$ ,  $^{256}\text{Rf}$ ,  $^{254}\text{Rf}$  были восстановлены впервые. Для каждого спектра были получены значения среднего количества нейтронов на распад и дисперсия распределения.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций им. Г. Н. Флерова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2021

Mukhin R. S. et al.

P6-2021-6

Reconstruction of Spontaneous Fission Neutron Multiplicity Distribution Spectra by the Statistical Regularization Method

We propose a technique for reconstructing the multiplicity distribution of spontaneous fission neutrons using the Tikhonov regularization method. The results obtained for  $^{252}\text{No}$ ,  $^{244}\text{Fm}$ ,  $^{246}\text{Fm}$ , and  $^{248}\text{Cm}$  are compared with previously reconstructed distributions. The multiplicity distributions of spontaneous fission neutrons of  $^{250}\text{No}$ ,  $^{256}\text{Rf}$ , and  $^{254}\text{Rf}$  were reconstructed for the first time. For each spectrum, the mean number of neutrons per decay and the dispersion of the distribution were obtained.

The investigation has been performed at the Flerov Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2021

## ВВЕДЕНИЕ

Для понимания базовых механизмов процесса спонтанного деления важными для изучения являются такие характеристики, как среднее количество испускаемых при делении вторичных частиц (гамма-квантов и/или нейтронов) и распределение их по множественностям. Однако все современные детектирующие системы имеют эффективность регистрации существенно меньше 100 %, из-за чего полученные экспериментально распределения являются искаженными и требуют восстановления. Данный процесс применим для изучения как мгновенных гамма-квантов деления, так и нейтронов и может быть описан с помощью уравнения

$$K\varphi = f, \tag{1}$$

где  $\varphi$  — истинный спектр множественности, а  $f$  — спектр множественности, полученный экспериментально.  $K$  — ядро уравнения, т. е. матрица отклика детектора, элементы которой для случая  $i$  зарегистрированных при  $j$  испущенных частиц и эффективности регистрации единичной частицы  $\varepsilon$  рассчитываются как

$$K_{i,j} = \frac{j!}{i!(j-i)!} \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{j-i}.$$

Прямое решение уравнения (1) может быть найдено следующим образом:

$$\varphi = K^{-1}f. \tag{2}$$

Однако прямое решение чаще всего не имеет физического смысла (рис. 1). Это связано с тем, что экспериментальные данные  $f$ , как и ядро уравнения  $K$ , содержат неизвестную шумовую составляющую, из-за чего эта обратная математическая задача относится к разряду «некорректных» и требует использования метода регуляризации для нахождения примерного решения.

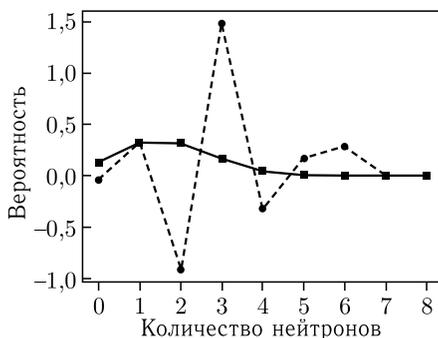


Рис. 1. Экспериментальный спектр множественности (сплошная линия) и прямое решение (штриховая линия) для  $^{252}\text{No}$  при эффективности регистрации единичного нейтрона 40 %

# 1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Метод статистической регуляризации применяется при решении обратных некорректных задач и детально описан и обоснован в работах [1, 2]. Примеры применения этой методики для анализа выхода нейтронов деления приведены в работах [3–5]. Суть метода заключается в том, чтобы использовать некоторую априорную информацию (например, о гладкости или неотрицательности истинного распределения) для поиска приближенного решения уравнения (1). Учет априорной информации осуществляется путем введения в уравнение дополнительного оператора регуляризации.

Введем новые векторные величины с «равной абсолютной точностью», пропорциональные экспериментальному спектру и матрице детектора:

$$g_i = \frac{s}{s_i} f_i, \quad L_{ij} = \frac{s}{s_i} K_{ij},$$

где  $s_i$  — погрешность измеренного спектра для  $i$ -й кратности, а величину  $s$  найдем из выражения

$$s^n = \prod_{i=0}^n s_i.$$

Таким образом, уравнение (1) можно привести к виду

$$L^* L \varphi = L^* g. \quad (3)$$

Уравнение (3) все еще является некорректным и требует введения оператора регуляризации. Сделаем два предположения: 1) ожидаемое распределение по множественностям «гладкое», т.е. наложим «штраф» на большие значения евклидовой нормы второй производной; 2) искомое распределение «плоское» на своих границах, т.е. наложим «штраф» на большие значения первой производной для первой и последней точек спектра. С учетом этих двух предположений в уравнение (3) добавим матрицу оператора  $R$  — сумму конечно-разностных представлений оператора второй производной [6] и первой производной для первой и последней точек, а также неотрицательный параметр регуляризации  $\alpha$ , который определяет «степень сглаженности»:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)n}, \quad (4)$$

$$(L^* L + \alpha s^2 R^* R) \varphi = L^* g.$$

Регуляризованное решение уравнения (4) и квадрат ошибки восстановления представлены так:

$$\varphi_p = (L^* L + \alpha s^2 R^* R)^{-1} L^* g,$$

$$\sigma_i^2 = s^2((L^*L + \alpha s^2 R^*R)^{-1})_{ii}.$$

Теперь встает вопрос о выборе оптимального значения параметра регуляризации. Найдем расхождение — среднеквадратичную величину ошибки (mean square error — mse) реальных экспериментальных данных относительно ожидаемых экспериментальных данных, предполагая, что  $\varphi_p$  — искомый истинный спектр:

$$\text{mse}_{\varphi}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n ((K\varphi_p)_i - f_i)^2. \quad (5)$$

Минимизируя выражение (5) по параметру регуляризации, можно найти «гладкое» восстановленное распределение. Однако такие решения зачастую оказываются слишком «заглаженными» и могут уходить в отрицательную область больше чем на величину ошибки восстановления. Другими словами, истинность таких решений вызывает сомнения. Таким образом, использование в качестве априорной информации только «гладкости» искомого распределения является спорной стратегией.

Важными интегральными характеристиками процесса деления являются среднее число испущенных вторичных частиц на распад и дисперсия распределения этих частиц по множественностям. Эти величины можно получить без восстановления истинного распределения, используя лишь экспериментально измеренное среднее число испущенных частиц (в нашем случае — нейтронов)  $\langle n \rangle$  и эффективность регистрации единичной частицы  $\varepsilon$  [3]:

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^n i f_i = \frac{\langle n \rangle}{\varepsilon}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\nu}^2 = \frac{\langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 - \bar{n}(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Было предложено дополнительно к расхождению (5) использовать данные о среднем количестве частиц на распад (6) и дисперсии (7), полученные из экспериментальных данных:

$$\text{mse}_{\bar{\nu}}^2 = (\bar{\nu} - \bar{\nu}_p)^2, \quad (8)$$

$$\text{mse}_{\sigma}^2 = (\sigma - \sigma_p)^2. \quad (9)$$

Таким образом, теперь мы имеем возможность оптимизировать значение параметра регуляризации  $\alpha$  без учета информации о среднем числе частиц и дисперсии (5), с учетом дополнительной информации о среднем числе (либо дисперсии) (10) либо с учетом всей известной информации (11):

$$\text{mse}^2 = \text{mse}_{\varphi}^2 + \text{mse}_{\bar{\nu}}^2, \quad (10)$$

$$\text{mse}^2 = \frac{1}{\delta_{\varphi}^2} \text{mse}_{\varphi}^2 + \frac{1}{\delta_{\bar{\nu}}^2} \text{mse}_{\bar{\nu}}^2 + \frac{1}{\delta_{\sigma}^2} \text{mse}_{\sigma}^2. \quad (11)$$

В выражении (11) введены веса для каждого члена, обратные квадрату погрешности вычисления или измерения априорных величин. Таким образом, мы повышаем веса для тех величин, которые получены с меньшей погрешностью. В выражении (10), строго говоря, веса тоже необходимы, но на практике погрешность при расчете среднего числа нейтронов равна усредненному значению погрешности измерения спектра, т. е. они примерно равны. По этой причине для упрощения расчетов в выражении (10) веса опущены.

## 2. СРАВНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В ДАННОЙ РАБОТЕ, С ПОЛУЧЕННЫМИ РАНЕЕ

В Лаборатории ядерных реакций им. Г. Н. Флерова (ОИЯИ, Дубна) проведена серия экспериментов по изучению спонтанного деления изотопов трансфермиевых элементов, получаемых в реакциях полного слияния с тяжелыми ионами. В результате обработки экспериментальных данных были получены спектры распределения нейтронов по множественностям, которые необходимо восстановить для представления полной картины. Эффективность регистрации единичных нейтронов не превышала 45 %.

Для проверки методики было проведено сравнение полученных в данной работе результатов с восстановленными ранее данными о выходах нейтронов спонтанного деления  $^{252}\text{No}$ ,  $^{244}\text{Fm}$ ,  $^{246}\text{Fm}$  [7] и  $^{248}\text{Cm}$  [8]. Все измеренные спектры показаны после вычитания фона. В табл. 1 приведены результаты расчетов среднего числа испускаемых нейтронов на распад и величины дисперсии. Во втором и пятом столбцах указаны значения среднего числа нейтронов (6) и дисперсии (7), рассчитанные из экспериментальных данных с учетом эффективности регистрации единичного нейтрона. Индексом  $p$  отмечены данные, полученные из множественностей, восстановленных в ходе данной работы. Индексом «ранее» отмечены данные из работ [7, 8].

Таблица 1. Среднее число нейтронов  $\langle \nu \rangle$  и дисперсии  $\sigma^2$ , вычисленные из экспериментальных данных (без индекса), в сравнении с полученными в ходе этой работы (с индексом  $p$ ) и восстановленными ранее данными в [7, 8] (с индексом «ранее»)

Изотоп	$\langle \nu \rangle$	$\langle \nu \rangle_p$	$\langle \nu \rangle_{\text{ранее}}$	$\sigma^2$	$\sigma_p^2$	$\sigma_{\text{ранее}}^2$
$^{252}\text{No}$	$4,30 \pm 0,20$	$4,20 \pm 0,30$	$4,06 \pm 0,12$	1,4	1,5	1,5
$^{244}\text{Fm}$	$3,70 \pm 0,30$	$3,80 \pm 0,50$	$3,30 \pm 0,30$	2,0	2,0	2,0
$^{246}\text{Fm}$	$3,90 \pm 0,50$	$3,90 \pm 0,90$	$3,60 \pm 0,50$	1,8	3,1	2,1
$^{248}\text{Cm}$	$3,21 \pm 0,07$	$3,20 \pm 0,20$	3,13	1,2	1,2	1,3

Восстановленные в этой работе данные соответствуют вычисленным из полученных экспериментально распределений и восстановленным ранее данным. Сравнения форм восстановленных спектров с полученными ранее приведены на рис. 2 и 3. Видно, что в пределах указанных ошибок спектры статистически неразличимы.

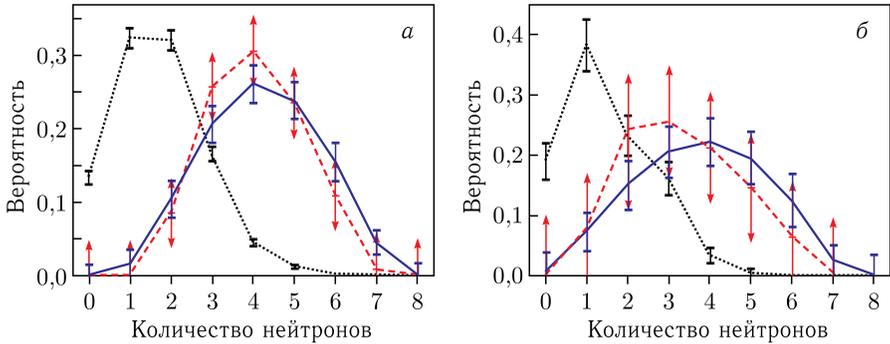


Рис. 2. Измеренный (пунктирная линия), восстановленный в этой работе (сплошная линия) и восстановленный в [7] (штриховая линия) спектры множественности для  $^{252}\text{No}$  (а) и  $^{244}\text{Fm}$  (б)

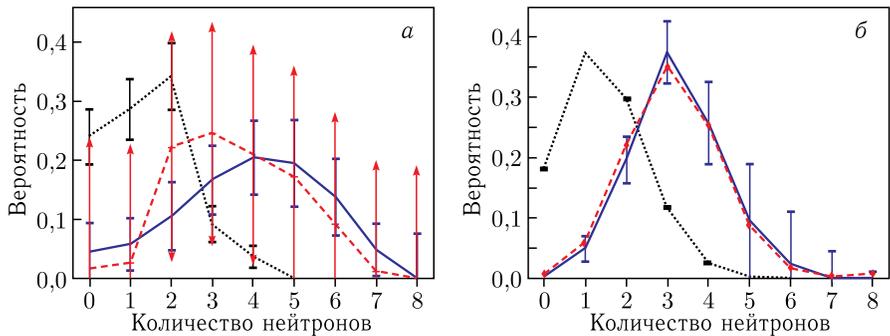


Рис. 3. Измеренный (пунктирная линия), восстановленный в этой работе (сплошная линия) и восстановленный в [7, 8] (штриховая линия) спектры множественности для  $^{246}\text{Fm}$  (а) и  $^{248}\text{Cm}$  (б)

### 3. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ НА СЕПАРАТОРЕ SHELS

В экспериментах, описанных в работах [9–11], были получены спектры множественностей для  $^{256}\text{Rf}$ ,  $^{254}\text{Rf}$  и  $^{250}\text{No}$  (для основного и изомерного состояний). В табл. 2 приведены экспериментальные и восстановленные в этой работе данные, эффективность регистрации единичного нейтрона  $\epsilon$  и общее количество зарегистрированных актов спонтанного деления  $N$ . Формы измеренных и восстановленных спектров приведены на рис. 4 и 5.

Большие ошибки восстановленного спектра обуславливаются малой статистикой зарегистрированных событий и невысокой эффективностью регистрации единичного нейтрона. Также большое влияние оказывает значение параметра регуляризации, оптимальное для каждого конкретного случая. Чем больше параметр регуляризации, тем более сглаженным является решение и меньше ошибка восстановления, но при этом среднее

Таблица 2. Эффективность регистрации единичного нейтрона  $\varepsilon$ , количество зарегистрированных актов распада  $N$ , рассчитанные из экспериментальных данных (без индекса) и восстановленные (с индексом  $p$ ) среднее число нейтронов  $\langle \nu \rangle$  и дисперсия  $\sigma^2$  распределения множественности нейтронов для изучаемых изотопов

Изотоп	$\varepsilon$ , %	$N$ , шт.	$\langle \nu \rangle$	$\langle \nu \rangle_p$	$\sigma^2$	$\sigma_p^2$
$^{256}\text{Rf}$	45,0 (1)	1244	$4,3 \pm 0,2$	$4,3 \pm 0,3$	3,2	3,2
$^{254}\text{Rf}$	45,0 (1)	140	$3,9 \pm 0,4$	$3,9 \pm 0,6$	3,0	3,4
$^{250}\text{No}$ (5 мкс)	43,6 (1)	338	$4,4 \pm 0,3$	$4,4 \pm 0,4$	1,3	1,3
$^{250}\text{No}$ (36 мкс)	43,6 (1)	181	$3,8 \pm 0,4$	$3,8 \pm 0,5$	2,2	2,2

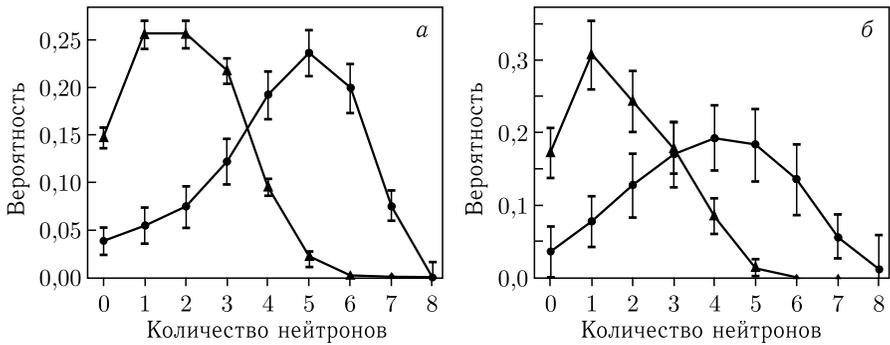


Рис. 4. Измеренный (▲) и восстановленный (●) спектры множественностей для  $^{256}\text{Rf}$  (а) и  $^{254}\text{Rf}$  (б)

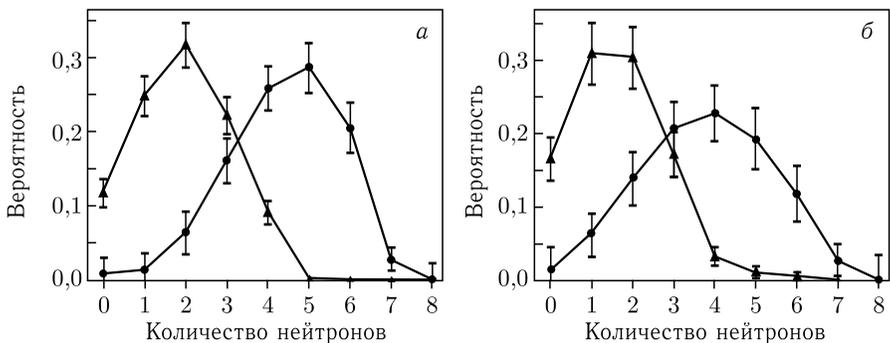


Рис. 5. Измеренный (▲) и восстановленный (●) спектры множественности для активностей, отнесенных к спонтанному делению  $^{250}\text{No}$  с периодом полураспада 5,1 (а) и 36 мкс (б)

количество нейтронов на распад и дисперсия восстановленного спектра могут «уплыть» от значений, полученных из экспериментальных данных. Поэтому иногда оптимальным оказывается небольшое значение параметра регуляризации, которое обеспечивает сохранение интегральных величин, но ошибка восстановления при этом вырастает.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы был реализован алгоритм статистической регуляризации для восстановления спектров распределения по множественностям нейтронов, испускаемых в процессе спонтанного деления трансфермиевых элементов. В качестве априорной информации использовалось предположение о гладкости истинного распределения. Для восстановленных спектров было введено требование сохранения среднего числа нейтронов и дисперсии распределения относительно величин, вычисленных из экспериментальных данных [5, 6].

Результаты, полученные в данной работе, сравнивались с восстановленными ранее данными для изотопов  $^{252}\text{No}$ ,  $^{244}\text{Fm}$ ,  $^{246}\text{Fm}$  [7] и  $^{248}\text{Cm}$  [8]. Среднее количество нейтронов на распад и дисперсия восстановленных в ходе данной работы распределений ближе к полученным из экспериментальных данных значениям, чем к приведенным ранее в работах [7, 8]. Данные о распределениях нейтронов по множественностям для  $^{254}\text{Rf}$ ,  $^{256}\text{Rf}$  и  $^{250}\text{No}$  приводятся впервые.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-52-15004).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН. 1970. Т. 102, № 3. С. 345–386.
2. Турчин В. Ф. Решение уравнения Фредгольма I рода в статистическом ансамбле гладких функций // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1967. Т. 7, № 6. С. 1270–1284.
3. Dakowski M., Lazarev Yu. A., Turchin V. F., Turovtseva L. S. Reconstruction of Particle Multiplicity Distribution Using the Method of Statistical Regularization // Nucl. Istr. Meth. 1973. V. 113. P. 195–200.
4. Dushin V. N., Hamsch F.-J., Jakovlev V. A., Kalinin V. A., Kraev I. S., Laptev A. B., Nikolaev D. V., Petrov B. F., Petrov G. A., Petrova V. I., Pleva Y. S., Shcherbakov O. A., Shpakov V. I., Sokolov V. E., Vorobyev A. S., Zavarukhina T. A. Facility for Neutron Multiplicity Measurements in Fission // Nucl. Istr. Meth. A. 2004. V. 516, No. 2–3. P. 539–553.
5. Kalinin V. A., Batenkov O. I., Dushin V. N. Neutron Registration Efficiency of the Large Liquid Gd-Loaded Scintillation Detector. Development of the Model for Calculation of the Evaporation Spectra of Neutrons Emitted from  $^{252}\text{Cf}$  (sf) Fission Fragments. Preprint RI-263. Saint Petersburg: V. G. Khlopin Radium Inst., 2005.

6. *Pourgholi R., Tabasi S.H., Zeidabadi H.* Numerical Techniques for Solving of Nonlinear Inverse Problem // *Eng. Comput.* 2018. No. 34. P. 487–502.
7. *Svirikhin A.I., Gupta M., Yeregin A.V., Izosimov I.N., Isaev A.V., Kuznetsov A.N., Malyshev O.N., Mulins S., Popeko A.G., Sokol E.A., Chelnokov M.L., Chepigin V.I.* Investigation into the Neutron Multiplicity of Spontaneously Fissioning Short-Lived Heavy Nuclei at the VASSILISSA Separator // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2012. V. 9, No. 1. P. 24–28.
8. *Holden N.E., Zucker M.S.* Prompt Neutron Multiplicities for the Transplutonium Nuclides // *Rad. Effects.* 1986. V. 96, No. 1–4. P. 289–292. DOI: 10.1080/00337578608211755.
9. *Svirikhin A.I., Yeregin A.V., Izosimov I.N., Isaev A.V., Kuznetsov A.N., Malyshev O.N., Popeko A.G., Popov Yu.A., Sokol E.A., Chelnokov M.L., Chepigin V.I., Andel B., Asfari M.Z., Gall B., Yoshihiro N., Kalaninova Z., Mullins S., Piot J., Stefanova E., Tonev D.* Spontaneous Fission of  $^{256}\text{Rf}$ , New Data // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2016. V. 13, No. 4. P. 480–482.
10. *Svirikhin A.I., Andreev A.V., Yeregin A.V., Zamyatin N.I., Izosimov I.N., Isaev A.V., Kuznetsov A.N., Kuznetsova A.A., Malyshev O.N., Popeko A.G., Popov Yu.A., Sokol E.A., Tezekbayeva M.S., Chelnokov M.L., Chepigin V.I., Schneidman T.M., Andel B., Antalic S., Bronis A., Mosat P., Gall B., Dorvaux O., Retailleau B.M., Hauschild K., Lopez-Martenz A., Chauveau P., Stefanova E., Tonev D.* Prompt Neutrons from Spontaneous  $^{254}\text{Rf}$  Fission // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. V. 16, No. 6. P. 768–771.
11. *Svirikhin A.I., Andreev A.V., Yeregin A.V., Izosimov I.N., Isaev A.V., Kuznetsov A.N., Kuznetsova A.A., Malyshev O.N., Popeko A.G., Popov Yu.A., Sokol E.A., Chelnokov M.L., Chepigin V.I., Schneidman T.M., Gall B., Dorvaux O., Brione P., Hauschild K., Lopez-Martenz A., Rezyunkina K., Mullins S., Jones P., Mosat P.* Characteristics of Spontaneous Fission of  $^{250}\text{No}$  // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2017. V. 14, No. 4. P. 571–575.

Получено 1 февраля 2021 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 04.03.2021.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,58. Тираж 170 экз. Заказ № 60082.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)