ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

Т. 60, № 5 СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ 1996

УДК 539.166.2

 В.М. ДУБОВИК, Б. САХА

О ТОРОИДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ МАГНИТНОЙ (СПИНОВОЙ) СРЕДЫ И МУЛЬТИПОЛЬНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

В память о профессоре Е.Л. Столяровой, благодаря которой один из авторов (В.М.Д.) стал физиком.

KEY WORDS. Generalized electromagnetic equoations, magnetic aggregates, multipole nuclear transitions.

Предлагается нелинейный вариант взаимодействия, позволяющий придать смысл наведенным электрическим моментам Блатта – Вайскопфа. Сделан подробный вывод (обобщающих максвелловские) макроскопических уравнений, которые с учетом тороидных поляризаций описывают электромагнитные свойства различных сред: магнитных суспензий, металлических кластеров, ядерной материи и т.д.

1. Впервые вклад тороидных моментов $T_{lm}(0)$, соответствующих определенным конфигурациям намагниченности среды или агрегата из намагниченных частиц, в амплитуду электрического типа излучения $\alpha_{lm,}$ был выделен Блаттом и Вайскопфом в целях описания электромагнитных переходов в ядрах ([1], стр. 626):

$$\alpha_{l,m} \sim \omega^{l+2}(Q_{lm} + Q'_{lm}), \tag{1}$$

где Q_{lm} – зарядовый (кулоновский) мультипольный момент определен обычным образом, Q'_{lm} – позднее получил название наведенного электрического момента (см., например, [2], стр. 611):

$$Q'_{lm} = -\frac{i\omega}{l+1}\int r^l Y^*_{lm}\,\mathrm{div}(\vec{r}\times\vec{M})d^3r. \tag{2}$$

Видим, что в определение момента вопреки тому, что он должен быть просто числом, точнее тензором, отражающим геометрическую симметрию объекта, входит динамическая величина – частота излучения ω. В рамках строгой теории мультипольного представления это недопустимо, а потому формулы (1) и (2) являются историческими курьезами.

Дело в том, что наличие спина у электронов и нуклонов и их орбитального движения в атомах и ядрах сразу указывало создателям аппарата мультипольного разложения (см., например, [3] и особенно [4]), что подстановка тока намагничения $\vec{j} = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$ и плотности намагничения $\rho_m = -\mathrm{div}\,\vec{M}$ в обычные определения мультипольных моментов M_{lm} и Q_{lm} приводит к дуальным вкладам, например в излучение El- и Ml-типов [5]. Однако "проектирование" объемного распределения зарядов и токов на плоское асимптотическое поле излучения оказалось довольно замысловатой задачей, на что указывалось еще в [6]. Эта проблема была решена только в 1974 г. [7], когда в поперечном токе была выделена дополнительно к Q_{lm} и M_{lm} третья мультипольная компонента, вклад тороидных моментов T_{lm}

$$T_{lm} \sim \int \vec{j} \operatorname{rot} r^{l+2} \vec{L} Y^*_{lm}(\hat{r}) d^3 r. \tag{3}$$

Подстановка в (3) $\vec{j} = c \operatorname{rot} \vec{M}$ и последующее интегрирование по частям показывают, что $Q'_{lm} = \omega T_{lm}$. Таким образом, вопрос об устранении кинематического констрэйна ω решается автоматически выбором в качестве фундаментальных моментов тороидных T_{lm}, которые, как известно, имеют простую геометрическую трактовку [7].

Следует также учесть, что полное мультипольное разложение не сводится только к степеням $(kr)^l$, так как сферическая функция Бесселя представляется рядом

$$f_l \sim (kr)^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2n}}{(-2)^n (2n+2l+1)!!}.$$

Поэтому нельзя определить по спектральной зависимости, скажем $\alpha_l \sim \omega^{P+2}$, что $P = l$, но только, что $P = l + 2n$, где l и $n = 0, 1, 2$ ... Другими словами, более весомым может вообще оказаться вклад не какого-либо из моментов, а какого-либо среднего $2n$-степенного радиуса. Поэтому формула (1), строго говоря, вообще некорректна и в ней следует сохранить вклад средних $2n$-степенных радиусов.

Наконец, попробуем придать какой-то смысл термину "наведенные электрические моменты". Известно, что энергия взаимодействия тороидного дипольного момента с внешним полем имеет вид

$$W = -\frac{1}{c} \vec{T} \vec{E}. \tag{4}$$

Представим себе, что в нечетном ядре протон, движущийся на внешней орбите, деформирует ядерный кор (остаток), создавая в нем магнитную и электрическую напряженности. Тогда мы можем переписать (4) в виде

$$W = \frac{1}{c} \gamma_{ik} B_k E_i = i \frac{\omega}{c} \gamma_{ik} B_k E_i \equiv \vec{Q}' \vec{E} \equiv \vec{M} \vec{B}, \tag{5}$$

где $Q_i = i\omega\gamma_{ik} B_k$, а $M_i = i\omega\gamma_{ik} E_i$ по определению. Другими словами, исходя из общих соображений можно предполагать, что наведенные моменты в ядре действительно могут возникать как отражение нелинейных эффектов в ядерной среде.

2. В настоящее время для построения теории электромагнитных свойств ядерной материи (нейтронные звезды, горячая Вселенная), а также описания свойств металлических кластеров, магнитных суспензий и прочих агрегированных на уровне микроскопики или мезоскопики сред важно их описание в адекватных полевых и материальных переменных. Тем более, что теоретический и экспериментальный опыт изучения магнитных агрегатов, состоящих из магнитных частиц (например, однодоменных), привел к выводу [8], что из 16 простейших конфигураций (от 3 до 5 частиц) лишь три линейные цепочки не обладают тороидными моментами, а четыре замкнутые цепочки – магнитными моментами. Все же остальные описываются и теми и другими в разной мере. Мы знаем, что компактные образования из намагниченных квантовых частиц – электронов, протонов, нейтронов, – составляющих атомные оболочки, ядра и т.п., в стабильном их состоянии обычно не обладают полными магнитными моментами. Отсюда следует, что в отсутствие их общего вращения как целого большая часть их внутреннего магнитного потока замкнута. Но это есть первый признак существования у них больших тороидных моментов. Запретов по четности и т.п. на их существование, вообще говоря, нет, так как их z-е компоненты могут коммутировать с остальным набором квантовых операторов, описывающих данный объект.

В качестве введения в суть предмета продемонстрируем, как модифицируются [9] макроскопические уравнения Максвелла для покоящейся среды

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^{\text{своб}}, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\text{своб}} + \dot{\vec{D}} \tag{7}$$

с учетом ее свойств тороидности, полярной и аксиальной: $\vec{T}(\vec{r})$ и $\vec{G}(\vec{r})$.

Введем соотношения, справедливые во всех точках пространства, которые определяют электрическую и магнитную поляризации:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} + 4\pi\vec{M}\,(\varepsilon_0 = \mu_0 = 1). \tag{8}$$

Эволюционные уравнения (7) перепишем в виде

$$\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} + \operatorname{rot}\vec{D} = 4\pi\operatorname{rot}\vec{P}, \quad -\frac{1}{c}\dot{\vec{D}} + \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\text{своб}} + 4\pi\operatorname{rot}\vec{M}. \tag{7'}$$

Напомним, что $\vec{P}$ и $\vec{M}$ в электродинамике играют двойную роль: с одной стороны, они локально могут быть идентифицированы с определенными распределениями зарядов и токов:

$$\rho_p^{\text{связ}} = -\operatorname{div}\vec{P}, \quad \vec{j}_m = c\operatorname{rot}\vec{M}, \tag{9}$$

с другой – их можно рассматривать как поля, электрическое и магнитное соответственно, источниками которых являются ρ_p и $\vec{j}_м$. Последняя трактовка обязывает нас дополнительно находить (вводить) уравнения состояния $\vec{P}(\vec{E})$ и $\vec{M}(\vec{B})$, замыкающие систему уравнений (6) и (7'). Однако, как мы уже указывали, опыт описания электромагнитных свойств кластеров говорит о том, что мы должны ввести еще два тока, соответствующих тороидным поляризациям среды:

$$\vec{j}_T = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{T}} \text{ и } \vec{j}_G = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{G}}. \tag{10}$$

Опыт работы с такими точечными источниками [10, 11] в целях описания эффектов типа Ааронова – Бома приводит к тому, что такой источник создает "пустой" вектор-потенциал, т.е. не дающий ни электрического, ни магнитного полей, однако являющийся калибровочно-инвариантной продольно-поперечной компонентой полного векторного потенциала. Следовательно, одновременно с введением в правую часть уравнений новых распределений "полей-источников" (10) мы обязаны перейти к физически более фундаментальным полевым переменным α^m и α^e. В результате полные уравнения для поперечной и продольно-поперечной сплошной электромагнитной среды принимают вид [9]

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{\alpha}}^m + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\alpha}^m = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{tr} + 4\pi(\operatorname{rot}\dot{\vec{M}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\ddot{\vec{T}}), \tag{11а}$$

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{\alpha}}^e + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\alpha}^e = 4\pi(\operatorname{rot}\dot{\vec{P}} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\ddot{\vec{G}}), \tag{11б}$$

где для интересующего нас в данном контексте статистического случая должна выполняться

$$\operatorname{div}\vec{\alpha}^m = \operatorname{div}\vec{\alpha}^e = 0, \quad \operatorname{div}\vec{j}^{tr} = 0, \tag{12}$$

$$\vec{D} = \operatorname{rot}\vec{\alpha}^e, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{\alpha}^m, \tag{13}$$

$$\vec{\alpha}^m = \vec{a}^m + 4\pi\dot{\vec{T}}, \quad \vec{\alpha} = \vec{a}^e + 4\pi\dot{\vec{G}},$$

$$\vec{\beta}^m = \operatorname{rot}\vec{\alpha}^m = \vec{D} + 4\pi\operatorname{rot}\dot{\vec{T}},$$

$$\vec{\varepsilon}^e = \operatorname{rot}\vec{\alpha}^e = \vec{D} + 4\pi\operatorname{rot}\dot{\vec{G}}. \tag{14}$$

Этот вывод системы уравнений электродинамики сред имеет эвристический характер. Приведем дедуктивное обоснование необходимости модификации электродинамики сплошных сред при наличии тороидных поляризаций и их окончательный вид.

3. Напишем уравнения магнитостатики в двух ее равноправных формах (см., например, [12]):

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = -4\pi\operatorname{div}\vec{M},\quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{H}), \tag{15}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + c\operatorname{rot}\vec{M}),$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,\quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{B}).$$

Легко убедиться, что без введения вектор-потенциала мы вообще не можем описать магнитную среду, например состоящую из замкнутых цепочек магнитных диполей. Действительно, в этом случае $\vec{M} \equiv 0$ и в отсутствие свободных токов имеем $\vec{B} \equiv \vec{H}$. Тогда уравнения магнитостатики тривиализуются:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = 0,\quad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0,\quad \operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

откуда, казалось бы, мы должны сделать вывод согласно теореме Гельмгольца, что $\vec{B} \equiv 0$ и $\vec{H} \equiv 0$ во всех точках пространства, что неправильно. И дело здесь в том, что $\vec{M} \equiv 0$ в среднем, но каждый физический объем, занимаемый замкнутой цепочкой, становится топологически нетривиальным.

Поэтому уравнения магнитостатики перепишем через $\vec{a}$, одновременно добавив в правую и левую его части вклад тороидной поляризации:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} + 4\pi\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{T} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,\text{своб}} + 4\pi(\operatorname{rot}\vec{M} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{T}), \tag{16}$$

$$\vec{\alpha} := \vec{a} + 4\pi\vec{T}. \tag{17}$$

В отсутствие свободных зарядов положим $\operatorname{div}\vec{\alpha} = 0$. Следовательно, основные уравнения тороидомагнитостатики будут выглядеть так:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\alpha} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,\text{своб}} + 4\pi(\operatorname{rot}\vec{M} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{T}), \tag{18}$$

$$\operatorname{div}\vec{\alpha} = 0 \tag{19}$$

при связи (17), справедливой во всех точках пространства. Эта система – аналог уравнений для $\vec{B}$. Редукция этой системы, аналог уравнений для $\vec{H}$, выглядит как

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}^{\,\text{своб}} + c\operatorname{rot}\vec{M}), \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = -4\pi\operatorname{div}\vec{T}. \tag{21}$$

Используя теорему Гельмгольца, мы получаем решение последней системы в виде

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \vec{j}^{\,\text{своб}}(\vec{r}\,')\frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int\frac{\operatorname{rot}\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + \nabla\int\operatorname{div}\vec{T}'\frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{22}$$

Первые два члена дают вклад, который обычно принято обозначать как $\vec{A}(\vec{r})$; в наших обозначениях полный вектор-потенциал – это $\vec{\alpha} = \vec{a} + 4\pi\vec{T}$. Конечно, изменилось и определение магнитного поля, так как с учетом тороидной поляризации (которая может быть для данной конкретной среды неоднородной, хотя бы в виде краевого эффекта [11, 13]), теперь мы имеем

$$\vec{\beta} = \mathrm{rot}\,\vec{\alpha} = \frac{1}{c}\mathrm{rot}\int \vec{j}^{\,\text{своб}}(\vec{r}\,')\frac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \mathrm{rot}\int \frac{\mathrm{rot}\,\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' + 4\pi\,\mathrm{rot}\,\vec{T}(\vec{r}). \tag{23}$$

Как видим, первые два вклада определяют магнитное поле (по старой терминологии магнитную индукцию) в среде, а измеряемое экспериментатором магнитное поле в большинстве кристаллических веществ, например без центра инверсии ячейки [14] или на границе сред, будет определяться третьим вкладом.

По аналогии с магнитостатикой введем постоянную тороидной восприимчивости

$$\chi_T = \frac{|\vec{T}^d|}{|4\pi\vec{\alpha}|}$$

и, предполагая, что постоянная тороидной проницаемости вакуума $\tau_0 = 1$, введем обычным образом постоянную тороидальной проницаемости среды $\tau = 1 + 4\pi\chi_\tau$. Продолжая аналогию с магнитостатикой, используем условие $\mathrm{div}\,\vec{\alpha} = 0$, с помощью которого можно записать

$$-\mathrm{div}\,\vec{a} = 4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{T}^d =: 4\pi\rho_T, \tag{24}$$

где введены фиктивные тороидные источники с эффективной плотностью "тороидного" заряда ρ_T. Так как в нашей формулировке истинная плотность тока обращается в нуль, мы можем ввести

$$\vec{a} = -\nabla\varphi_T. \tag{25}$$

Подставляя это определение в предыдущее уравнение, получаем основное уравнение тороидостатики:

$$\nabla^2\varphi_T = 4\pi\rho_T \equiv -4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{T}^d. \tag{26}$$

Если тороидный образец имеет объем V и поверхность δV, мы найдем для $\vec{T}(\vec{r})$ внутри V (если предположить, что эта функция стремится к нулю на поверхности δV) решение в виде

$$\varphi_T = \int_V \frac{\vec{\nabla}'\vec{T}^a(\vec{r}\,')d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int_{\delta V} \frac{\vec{T}^d(\vec{r}\,')d\vec{\sigma}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{27}$$

Применяя теорему Гаусса к расходимости плотности div $\vec{T}^d =: \rho_T$, можно ввести эффективную тороидную поверхностную "зарядовую" плотность

$$\sigma_T = \vec{n}\cdot\vec{T}^d, \tag{28}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности δV.

Рассмотрим частный случай – однородное распределение тороидности в объеме V. Тогда первый интеграл обращается в нуль, а вклад дает только поверхностный интеграл

$$\varphi_T = -\int_{\delta V} \frac{\vec{T}^d(\vec{r}\,')d\vec{\sigma}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{29}$$

а первый член после интегрирования по частям можно записать в виде

$$\varphi_T = -\vec{\nabla}\int \frac{\vec{T}^d(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'. \tag{30}$$

Отсюда следует

$$\vec{a} = \Delta\int \frac{\vec{T}^d(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r', \quad \vec{\alpha} = \vec{a} + 4\pi\vec{T}^d. \tag{31}$$

В результате в области, далекой от источника, скалярный тороидный потенциал φ_T записывается в виде

$$\varphi_T(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\vec{\tau}/r),$$

где $\vec{\tau} = \int\limits_V \vec{T}(\vec{r})d^3r$ есть полный тороидный момент распределения $\vec{T}^d(\vec{r})$ в V.

Уравнение тороидомагнитостатики превращается в волновое уравнение естественным добавлением $\dot{k}$ rot rot $\vec{\alpha}$ члена $\ddot{\vec{\alpha}}$ [9]:

$$\Box\vec{\alpha}^m = 4\pi(\mathrm{rot}\,\vec{P} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{T}), \quad \Box\vec{\alpha}^e = 4\pi(\mathrm{rot}\,\vec{M} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{G}). \tag{32}$$

Возвращаясь к ядерной материи заметим, что, поскольку нуклоны заметной электрической поляризацией не обладают, приведем формулы для квантово-механических агрегатов (ядер) только для $\vec{M}$ и $\vec{T}$. Для системы нуклонов имеем

$$\vec{M} = \sum_k \vec{\mu}_k = \mu_0 \sum_k (g_{sk}\vec{s}_k + 2g_{lk}\vec{l}_k), \tag{33}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mu}_k; \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \tag{34}$$

$$\vec{j}^{\,\text{полн}} = \sum_k \left[e_k\vec{v}_k\delta(\vec{r}-\vec{r}_k)\right]_{\text{сим}} + 4\pi(\mathrm{rot}\,\vec{M} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{T}). \tag{35}$$

Соответствующие операторы одночастичного перехода и переходного тока в двухчастичной системе даны в [15, 16]. В последующих работах мы надеемся развить квантовое описание электромагнитных свойств ядерной материи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блатт Дж., Вайскопф В.* Теоретическая ядерная физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
3. *Wallace P.R.* Canad. J. Phys. 1951. V. 29. P. 393.
4. *Franz W.* // Z. Phys. 1950. V. 127. P. 363.
5. *Дубовик В.М., Тосунян Л.А.* // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. Вып. 5. С.1193.
6. *French J.B., Shimamoto Y.* // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 898.
7. *Дубовик В.М., Чешков А.А.* // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. Вып. 3. С. 791. *Дубовик В.М., Чешков А.А.* Препринты ОИЯИ Р2-5283, Р2-5284. 1970.
8. *Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М.* // ЭЧАЯ. 1993. Т. 24. Вып. 4. С. 1056.
9. *Dubovik V.M., Magar E.N.* //Mosc. Phys. Soc. 1993. V. 3. P. 245.
10. *Afanasiev G.N.* The electrical vector potentials, electromagnetic potential waves and toroidal Aharonov–Cusher effect. In "Symmetry methods in physics" Dubna. 1973.
11. *Dubovik V.M., Tugushev V.V.* // Phys. Rep. 1990. V. 187. № 4. P. 145.
12. *Власов А.А.* Макроскопическая электродинамика. М.: Гостехтеориздат., 1955.
13. *Дубовик В.М., Кротов С.С., Тугушев В.В.* // Кристаллография. 1987. Т. 32. Вып. 3. С. 540.
14. *Afanasiev G.N.* // J. Comp. Phys. 1987. V. 69. № 1. P. 196; J. Phys. A. 1988. V. 21. № 10. P. 2055.
15. *Dubovik V.M.* Preprint JINR. E2-9262. 1977. 6 p.
16. *Дубовик В.М., Тосунян Л.А., Тугушев В.В.* // ЖЭТФ. 1986. Т. 63. С. 344.

Объединенный институт
ядерных исследований,
Дубна