

УДК 517.958, 530.145.6, 519.632.4

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАНТОВО- МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*А.А. Гусев, О. Чулуунбаатар, С.И. Веницкий, А. Гуждэж**

Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия

*Институт физики, университет им. М. Кюри-Склодовска,
г. Люблин, Польша

АННОТАЦИЯ

Представлена вычислительная схема метода конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных, сохраняющая непрерывность производных приближенного решения. Эффективность алгоритмов и программ демонстрируется на примере точно-решаемых краевых задач на собственные значения для треугольной мембраны.

Ключевые слова: эллиптические уравнения в частных производных, краевые задачи на собственные значения, метод конечных элементов, интерполяционные полиномы.

Введение

В работах [1,2] разработаны символьно-численные алгоритмы и программы решения краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных элементов (МКЭ) высокого порядка точности с использованием интерпо-

ляционных полиномов Эрмита (ИПЭ). Такая реализация МКЭ, в отличие от традиционной, с использованием интерполяционных полиномов Лагранжа (ИПЛ), обеспечивает непрерывность производных до заданного порядка приближенного решения не только на конечных элементах сетки, но и на границах конечных элементов [3], то есть сохранение тока носителей заряда в квантово-размерных полупроводниковых системах или тока вероятности в квантовомеханических задачах рассеяния [4].

В настоящей работе представлена вычислительная схема МКЭ решения краевой задачи на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных с использованием ИПЭ. Кусочно-непрерывный базис генерируется с помощью ИПЭ и обеспечивает непрерывность не только приближенного решения, но и его производных до заданного порядка в зависимости от гладкости переменных коэффициентов уравнения и границы области. Эффективность алгоритмов и программ демонстрируется на примере точно-решаемых краевых задач на собственные значения для треугольной мембраны.

Постановка задачи

Рассмотрим самосопряженную краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка:

$$\left(-\frac{1}{g_0(z)} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial z_i} g_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + V(z) - E \right) \Phi(z) = 0. \quad (1)$$

Для коэффициентов главной части (1) выполняется условие равномерной эллиптичности в ограниченной области $z = (z_1, \dots, z_d) \in \Omega$ евклидова пространства \mathbb{R}^d , т.е. существуют константы $\nu > 0$, $\mu > 0$, такие, что для любых вещественных параметрах ξ_i выполняется

неравенство $\mu \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d g_{ij}(z) \xi_i \xi_j \leq \nu \sum_{i=1}^d \xi_i^2$. Также предполагается, что $g_0(z) > 0$, $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, и $V(z)$ – функции, непрерывные вместе со своими обобщенными производными до заданного порядка в области, $z \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$, с кусочно-полиномиальной границей $S = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$, обеспечивающие существование нетривиальных решений, подчиненных граничным условиям первого (I) или второго (II) рода [5,6]

$$(I): \Phi(z)|_S = 0, \quad (II): \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \hat{n}_D} = \sum_{i,j=1}^d (\hat{n}, \hat{e}_i) g_{ij}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z_j} \Big|_S = 0, \quad (2)$$

где \hat{n} – внешняя нормаль к границе $S = \partial\Omega$ области Ω , \hat{e}_i – единичный вектор вектора $z = \sum_{i=1}^d \hat{e}_i z_i$, (\hat{n}, \hat{e}_i) – скалярное произведение в \mathbb{R}^d .

Для краевой задачи дискретного спектра (1)-(2) собственные функции $\Phi_m(z)$ из пространства Соболева $W_2^{s \geq 1}(\Omega)$, $\Phi_m(z) \in W_2^{s \geq 1}(\Omega)$, соответствующие собственным значениям энергии $E_1 \leq E_2 \dots \leq E_m \leq \dots$, удовлетворяют условиям нормировки и ортогональности

$$\int_{\Omega} g_0(z) \bar{\Phi}_m(z) \Phi_{m'}(z) dz = \delta_{mm'}. \quad (3)$$

Решение МКЭ краевых задач (1)–(3) сводится к нахождению стационарных точек симметричного вариационного функционала [6,7]

$$\Xi(\Phi_m, E_m, z) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^d g_{ij}(z) \frac{\partial \bar{\Phi}_m(z)}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi_m(z)}{\partial z_j} + g_0(z) \bar{\Phi}_m(z) (V(z) - E_m) \Phi_m(z) \right) dz. \quad (4)$$

Базисы лагранжевых и эрмитовых конечных элементов

1. В МКЭ область $\Omega = \Omega_h = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, заданная в виде многогранника, покрывается конечными элементами, в данном случае симплек-

сами Δ_q с $d+1$ вершинами $\hat{z}_j = (\hat{z}_{j1}, \dots, \hat{z}_{jd})$ при $j = 0, \dots, d$. Каждое ребро симплекса Δ_q разбиваем на p равных частей и проводим семейства параллельных гиперплоскостей, нумеруя каждую целым числом от 0 до p , начиная от соответствующей грани, например, как показано при $d = 2$ на Рис. 1 (см. также [8]. С. 220). Точки A_r пересечения гиперплоскостей нумеруем наборами целых чисел $[n_0, \dots, n_d]$, $n_i \geq 0, n_0 + \dots + n_d = p$. Координаты узловой точки $A_r \in \Delta_q$ определяются по формуле $\xi_r = (\xi_{r1}, \dots, \xi_{rd}) = \sum_{j=0}^d (\hat{z}_{j1}, \dots, \hat{z}_{jd}) n_j / p$ через координаты вершин $\hat{z}_j = (\hat{z}_{j1}, \dots, \hat{z}_{jd})$.

При реализации МКЭ расчеты удобно проводить в локальных координатах z' , связанных с исходными координатами z аффинным преобразованием, $z_j = \hat{z}_{0j} + \sum_{i=1}^d (\hat{z}_{ij} - \hat{z}_{0j}) z'_i, j = 1, \dots, d$, в которых координаты вершин симплекса Δ следующие $\hat{z}'_j = (\hat{z}'_{j1}, \dots, \hat{z}'_{jd}), \hat{z}'_{jj} = \delta_{jj}$. Тогда ИПЛ $\varphi_r(z')$, равные единице в узловой точке A_r с координатами $\xi'_r = (\xi'_{r1}, \dots, \xi'_{rd})$, характеризуемой числами $[n_0, \dots, n_d]$, и нулю в остальных точках $\xi'_{r'} = (\xi'_{r'1}, \dots, \xi'_{r'd}),$ т.е., $\varphi_r(\xi_{r'}) = \delta_{rr'}$, определяются по формуле:

$$\varphi_r(z') \equiv \varphi_r((z'_1, \dots, z'_d)) = \left(\prod_{j=1}^d \prod_{n'_j=0}^{n_j-1} \frac{z'_j - n'_j / p}{n_j / p - n'_j / p} \right) \left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1} \frac{1 - z'_1 - \dots - z'_d - n'_0 / p}{n_0 / p - n'_0 / p} \right). \quad (5)$$

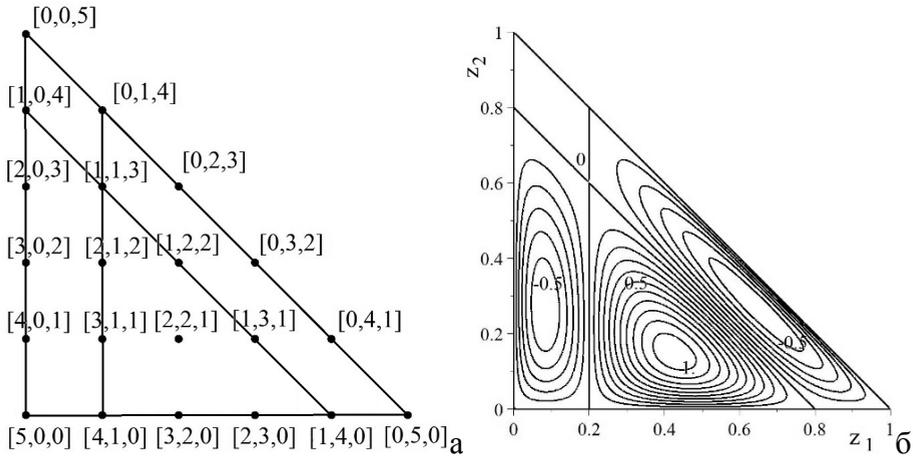


Рис. 1.

- а.** Нумерация узлов A_r , $r = 1, \dots, (p+1)(p+2)/2$, наборами чисел $[n_0, n_1, n_2]$ треугольника Δ для схемы с ИПЛ пятого порядка $p' = p = 5$ при $d = 2$. Линии (пять пересекающихся прямых) – нули ИПЛ $\varphi_{14}(z')$ (5), равного единице в точке, пронумерованной тройкой чисел $[n_0, n_1, n_2] = [2, 2, 1]$.
- б.** Изолинии ИПЛ $\varphi_{14}(z')$.

Приравнивание числителей в (5) нулю дает семейства уравнений прямых, направленных «горизонтально», «вертикально» и «наклонно» в локальной системе координат (z'_1, z'_2) , которая связана аффинным преобразованием с семейством «наклонно» расположенных прямых элемента Δ_q . На Рис. 1 дан пример иллюстрирующий построение ИПЛ при $d = 2$, $r, r' = 1, \dots, (p+1)(p+2)/2$, $p = 5$ на элементе Δ .

Кусочно-полиномиальные функции $P_l(z)$, формирующие базис $\{P_l(z)\}_{l=1}^p$, которые строятся путем сшивки ИПЛ $\varphi_r(z)$ на конечных элементах Δ_q : $P_l(z) = \{\varphi_l(z), A_l \in \Delta_q; 0, A_l \notin \Delta_q\}$, $z \in \Omega_h = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, яв-

ляются непрерывными функциями, но их производные терпят разрывы на границах элементов Δ_q .

2. Построим интерполяционные полиномы Эрмита порядка p' , сшивкой которых можно получить кусочно-полиномиальные функции $P_j(z)$, сохраняющие непрерывность производных до заданного порядка κ' .

Для построения ИПЭ в локальных координатах z' введем набор вспомогательных полиномов (ВП1):

$$\varphi_r^{\kappa_1, \dots, \kappa_d}(\xi'_r) = \delta_{rr'} \delta_{\kappa_1 0} \dots \delta_{\kappa_d 0}, \quad \left. \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_d} \varphi_r^{\kappa_1, \dots, \kappa_d}(z')}{\partial z_1^{\mu_1} \dots \partial z_d^{\mu_d}} \right|_{z'=\xi'_r} = \delta_{rr'} \delta_{\kappa_1 \mu_1} \dots \delta_{\kappa_d \mu_d}, \quad (6)$$

$$0 \leq \kappa_1 + \dots + \kappa_d \leq \kappa_{\max} - 1, \quad 0 \leq \mu_1 + \dots + \mu_d \leq \kappa_{\max} - 1,$$

с заданными значениями не только функций, но и их производных до порядка $\kappa_{\max} - 1$ в узловых точках ξ'_r . ВП1 даются выражениями

$$\varphi_r^{\kappa_1, \dots, \kappa_d}(z') = w_r(z') \sum_{\mu_1, \dots, \mu_d} a^{\kappa_1, \dots, \kappa_d, \mu_1, \dots, \mu_d} (z'_1 - \xi'_{r1})^{\mu_1} \times \dots \times (z'_1 - \xi'_{rd})^{\mu_d},$$

$$w_r(z') = \left(\prod_{j=1}^d \prod_{n'_j=0}^{n_j-1} \frac{(z'_j - n'_j / p)^{\kappa_{\max}}}{(n_j / p - n'_j / p)^{\kappa_{\max}}} \right) \left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1} \frac{(1 - z'_1 - \dots - z'_d - n'_0 / p)^{\kappa_{\max}}}{(n_0 / p - n'_0 / p)^{\kappa_{\max}}} \right), \quad (6')$$

где коэффициенты $a^{\kappa_1, \dots, \kappa_d, \mu_1, \dots, \mu_d}$ вычисляются из рекуррентных соотношений, полученных в результате подстановки (6') в условия (6). При $d > 1$ и $\kappa_{\max} > 1$, число $N_{\kappa_{\max} p'}$ ИПЭ степени p' и кратности узлов κ_{\max} меньше числа полиномов $N_{1p'}$, формирующих базис в пространстве полиномов степени p' (например, ИПЛ из (5)), т.е. полиномы, удовлетворяющие (6), определены неоднозначно.

3. Для однозначного определения полиномиального базиса введём $K = N_{1p'} - N_{\kappa_{\max} p'}$ вспомогательных полиномов $Q_s(z)$ двух

типов: ВП2 и ВП3, линейно-независимых от ВП1 и удовлетворяющих условиям в узловых точках $z' = \xi'_r$:

$$Q_s(\xi'_r) = 0, \quad \left. \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_d} Q_s(z)}{\partial z_1^{\mu_1} \dots \partial z_d^{\mu_d}} \right|_{z=\xi'_r} = 0, \quad s = 1, \dots, K. \quad (7)$$

Отметим, что для обеспечения непрерывности производных часть полиномов, называемых ВП2, должны удовлетворять условию

$$\left. \frac{\partial^k Q_{s'}(z)}{\partial n^k} \right|_{z=\zeta_s} = \delta_{ss'} \cdot \delta_{kk'}, \quad s = 1, \dots, K, s' = 1, \dots, T_1(\kappa'), k = k(s'), \quad (8)$$

где n – вектор в направлении внутренней нормали в некоторых выбранных точках ζ_s граней (размерности от 1 до $d-1$) d -мерного симплекса Δ_q в исходной системе координат, связанной аффинным преобразованием с соответствующими точками ζ'_s в локальной системой координат симплекса Δ , не совпадающими с узловыми точками ξ'_r .

Вычисляя число $T_1(\kappa')$ независимых параметров, требуемых для обеспечения непрерывности производных до порядка κ' , определяем его максимальное значение, которое можно получить для схем с заданными p и κ_{\max} , и, соответственно, $T_1(\kappa')$ дополнительных условий (8).

Остается $T_2 = K - T_1(\kappa')$ независимых параметров и, соответственно, добавляется T_2 дополнительных условий, необходимых для однозначного определения полиномов, называемых ВП3,

$$Q_{s'}(\zeta'_s) = \delta_{ss'}, \quad s = 1, \dots, K, s' = T_1(\kappa') + 1, \dots, K, \quad (9)$$

где ζ'_s – некоторые выбранные точки, не принадлежащие граням симплекса Δ , и не совпадающие с узловыми точками ξ'_r .

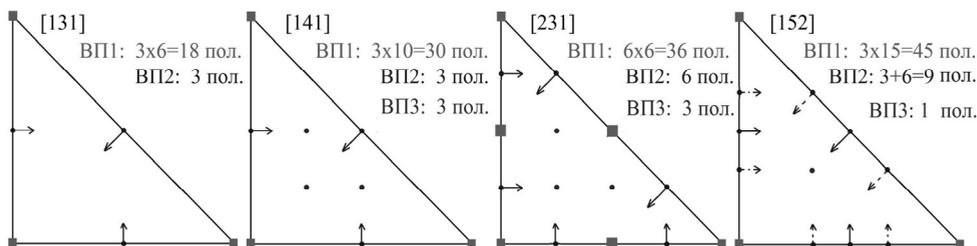


Рис. 2.

Схематическое изображение условий (6)–(9), из которых строятся базисные ИПЭ $[p \kappa_{\max} \kappa']$. Квадраты: точки ξ'_r , в которых фиксируются значения функций и их производных, сплошные (пунктирные) стрелки: с началом в точках ζ_s , в которых фиксируются значения первой (второй) производной по направлению нормали в исходных координатах, соответственно, кружки: точки ζ'_s , в которых фиксируются значения функций.

Таблица

Характеристики полиномиального базиса при $d=2$.

	$[p \kappa_{\max} \kappa']$	[131]	[141]	[231]	[152]
p'	$\kappa_{\max}(p+1)-1$	5	7	8	9
$N_{\kappa_{\max} p'}$	$(p+1)(p+2)\kappa_{\max}(\kappa_{\max}+1)/4$	18	30	36	45
$N_{1p'}$	$(p'+1)(p'+2)/2$	21	36	45	55
K	$p(p+1)(\kappa_{\max}-1)\kappa_{\max}/4$	3	6	9	10
$T_1(1)$	$3p$	3	3	6	3
$T_1(2)$	$9p$	9	9	18	9
Ограничение на порядок производных κ' : $3p\kappa'(\kappa'+1)/2 \leq K$					

Вспомогательные полиномы ВП2 и ВП3 даются выражением $z \rightarrow z'$

$$Q_s(z) = z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d} (1 - z_1 - \dots - z_d)^{k_0} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_d} b^{s, \mu_1, \dots, \mu_d} z_1^{\mu_1} \times \dots \times z_d^{\mu_d}, \quad (10)$$

где $k_i = 1$, если точка ζ_s , в которой заданы дополнительные условия (8) или (9), лежит на соответствующей грани симплекса, и $k_i = \kappa'$ в противном случае. Коэффициенты $b^{s, \mu_1, \dots, \mu_d}$ определяются из системы линейных уравнений, полученных в результате подстановки (10) в условия (7)–(9).

В результате получаем набор базисных ИПЭ $\varphi_l(z) = \{ \hat{\varphi}_r^\kappa(z), Q_s(z) \}$, составленных из полиномов $Q_s(z)$ типа ВП2 и ВП3 и полиномов $\hat{\varphi}_r^\kappa(z)$ типа ВП1:

$$\hat{\varphi}_r^\kappa(z) = \varphi_l^\kappa(z) - \sum_{i=1}^K c_{\kappa r; s} Q_s(z),$$

где $c_{\kappa r; s} = \left. \frac{\partial^k \varphi_r^\kappa(z)}{\partial n^k} \right|_{z=\zeta_s}$, для $Q_i(z)$ из ВП2 и $c_{\kappa r; s} = \varphi_r^\kappa(\zeta_s)$,

для $Q_i(z)$ из ВП3.

4. Например, при $d = 2$ степень p' полинома по тангенциальной переменной t на границе треугольника совпадает со степенью полинома двух переменных, и для его однозначного определения требуется $p'+1$ параметр. Производная порядка κ' по нормальной переменной на границе будет полином степени $p' - \kappa'$, и для ее однозначного определения потребуется $p' - \kappa' + 1$ параметров. Однако она определена только $p' - \kappa'(p+1)$ параметрами: смешанными производными фиксированного порядка κ' по нормальной переменной и порядка от 0 до $\kappa_{\max} - \kappa' - 1$ по тангенциальной переменной, т.е.

$$\frac{\partial^{\kappa'} Q_{s'}(z)}{\partial n^{\kappa'}}, \frac{\partial^{\kappa'+1} Q_{s'}(z)}{\partial n^{\kappa'} \partial t}, \frac{\partial^{\kappa'+2} Q_{s'}(z)}{\partial n^{\kappa'} \partial t^2}, \dots, \frac{\partial^{\kappa_{\max}-1} Q_{s'}(z)}{\partial n^{\kappa'} \partial t^{\kappa_{\max}-\kappa'-1}}.$$

Схематическое изображение реализации условий (6)–(9), из которых строятся базисные ИПЭ, показано при $d=2$ на Рис 2. Характеристики полиномиального базиса из ИПЭ на элементе Δ при $d=2$ приведены в Таблице.

5. Кусочно-полиномиальные функции $P_l(z)$ с непрерывными производными до порядка κ' , формирующие базис $\{P_l(z)\}_{l=1}^N$, строятся путем сшивки полиномов $\phi_l(z) = \{\hat{\phi}_l^{\kappa}(z), Q_s(z)\}$ на конечных элементах Δ_q :

$$P_l(z) = \{\pm \phi_l(z), A_l \in \Delta_q; 0, A_l \notin \Delta_q\}, z \in \Omega_h = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q,$$

где знак ‘ \pm ’ может появиться только для ВП2, когда нужно сшить нормальные производные нечетного порядка.

Разложение искомого решения $\Phi_m(z)$ задачи (1)–(3) по базису кусочно-полиномиальных функций $P_l(z)$, $\Phi_m^h(z) = \sum_{l=1}^N P_l(z) \Phi_{lm}^h$, и подстановка его в вариационный функционал (4) приводит к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения, $(A - BE_m^h) \Phi_m^h = 0$, которая решается стандартным методом (см., например, [7]). Элементы матриц жесткости A и матрицы масс B содержат интегралы типа (4), которые вычисляются в исходных координатах z на элементах Δ_q в области $\Omega_h = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, пересчитанные в локальные координаты z' на элементе Δ .

Результаты и обсуждение

В качестве примера приведем результаты решения задачи дискретного спектра (1)–(3) при $d = 2, g_0(z) = 1, g_{ij}(z) = 1$ и $V(z) = 0$ в

области $\Omega_h = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$ в виде равностороннего треугольника со стороной $4\pi/3$ с граничными условиями второго типа (II), который разбит на $Q = n^2$ равносторонних треугольников Δ_q со стороной $h = 4\pi/3n$. Собственные значения этой задачи с вырожденным спектром – целые числа $E_m = m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 = 0, 1, 1, 3, 4, 4, 7, 7, \dots$ [9].

На Рис. 3 представлены профиль четвертой собственной функции Φ_4^h и погрешности $\Delta E_4 = E_4^h - E_4$ собственного значения E_4^h в зависимости от числа элементов n и от длины вектора N для схем с ИПЛ от пятого до девятого порядка точности, отмеченные метками $[p, \kappa_{\max}, \kappa'] = [510], \dots, [910]$, для схем с ИПЭ, $p' = 5, 7$ и 8 порядка точности, сохраняющие первую производную приближенного решения и отмеченные метками [131], [141] и [231], и схемы девятого порядка точности [152], сохраняющей вторую производную приближенного решения. Описание характеристик представленных схем с ИПЭ дано в Таблице. Как видно из Рис. 3, погрешности собственного значения E_4^h схем МКЭ одного порядка $p' = \kappa_{\max}(p+1) - 1$ примерно одинаковые. Однако для достижения заданной точности приближенного решения в схемах МКЭ с ИПЭ, обеспечивающих непрерывность первой и второй производных приближенного решения, используются матрицы меньшей размерности, соответствующие длине вектора N в 1.5–2 раза меньшей, чем для схем с ИПЛ, обеспечивающих только непрерывность приближенного решения.

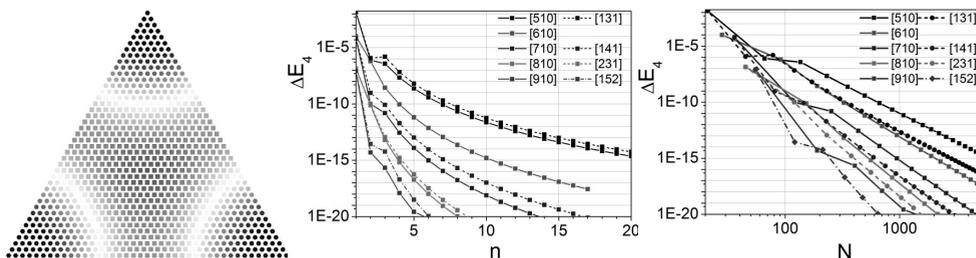


Рис. 3.

Профиль четвертой собственной функции Φ_4^h и зависимости погрешности $\Delta E_4 = E_4^h - E_4$ собственного значения E_4^h . Пояснение в тексте.

Заключение

Предложена вычислительная схема МКЭ высокого порядка точности решения задачи на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных в двумерной области, обеспечивающая непрерывность не только приближенного решения, но и его производных до заданного порядка. На примере точно-решаемой краевой задач для треугольной мембраны показано, что для достижения заданной точности приближенного решения, для схем с МКЭ с ИПЭ, обеспечивающих непрерывность первой и второй производных приближённого решения используются матрицы меньшей размерности, соответствующие длине вектора N в 1.5–2 раза меньшей, чем для схем с ИПЛ, сохраняющих на границах конечных элементов только непрерывность приближенного решения.

Вычислительные схемы МКЭ ориентированы на расчеты спектральных и оптических характеристик квантовых точек и других квантовомеханических систем. Реализация МКЭ с ИПЭ в конфигурационном пространстве $d \geq 2$ будет дана в последующих работах.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00080) и программой Боголюбов-Инфельд (ОИЯИ-Польша).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gusev A.A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S.I., Derbov V.L., Gozdz A., Hai L.L., Rostovtsev V.A. Lect. Notes Comp. Sci. 8660 (2014), 138.
2. Gusev A.A., Hai L.L., Chuluunbaatar O., Vinitsky S.I. KANTBP 4M: Program for Solving Boundary Problems of the System of Ordinary Second Order Differential Equations.
<http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp4m/indexe.html>
3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
4. Ramdas Ram-Mohan L. Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics, New York, Oxford Univ. Press, 2002.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1973.
6. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
9. Mc Cartin B.J. Laplacian Eigenstructure of the Equilateral Triangle. Ruse, Bulgary: Hikari Ltd, 2011.

**FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE
PROBLEMS OF QUANTUM MECHANICAL SYSTEMS**

*A.A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S.I. Vinitzky, A. Góźdź**

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

*Institute of Physics, University of M. Curie-Sklodowska, Lublin, Poland.

ABSTRACT

The computational scheme of Finite Element Method of high order accuracy for solving the boundary value problem for elliptic partial differential equation, conserving a continuity of derivatives of approximate solution is presented.

The efficiency of algorithm and program is demonstrated on an example of exact-solvable boundary-value problem for triangular membrane.

Keywords: elliptic partial differential equations, boundary-value problem, finite element method, interpolation polynomials.