Различные виды уравнения прямой на плоскости
Общее уравнение прямой.
Неполные уравнения прямой.
Уравнение прямой в отрезках.
Каноническое уравнение прямой.
Прямая с угловым коэффициентом.
Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

# 10 — Лекция 10

## 10.1 Различные виды уравнения прямой на плоскости

### 10.1.1 Общее уравнение прямой.

Покажем, что если на плоскости $\pi$ задана произвольная прямая линия $L$ и фиксирована произвольная декартова прямоугольная система $Oxy$, то прямая $L$ определяется в этой системе уравнением первой степени.

Для этого достаточно доказать, что прямая $L$ определяется уравнением первой степени при каком-то одном специальном выборе декартовой прямоугольной системы на плоскости $\pi$, т.к. тогда она будет определяться уравнением первой степени и при любом выборе декартовой прямоугольной системы на плоскости $\pi$.

Направим ось $Ox$ вдоль прямой $L$, а ось $Oy$ перпендикулярно к ней. Тогда уравнением прямой будет уравнение первой степени $y = 0$. В самом деле, этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки, лежащей на прямой $L$, и не будут удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на прямой $L$.

Докажем теперь, что если на плоскости $\pi$ фиксирована произвольная декартова прямоугольная система $Oxy$, то всякое уравнение первой степени с двумя переменными $x$ и $y$ определяет относительно этой системы прямую линию.

Пусть фиксирована произвольная декартова прямоугольная система $Oxy$ и задано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.1}$$

в котором $A$, $B$ и $C$ - какие угодно постоянные, причем из постоянных $A$ и $B$ хотя бы одна отлична от нуля. Уравнение (10.1) заведомо имеет хотя бы одно решение $x_0, y_0$, т. е. существует хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (10.1):

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \tag{10.2}$$

Вычитая из уравнения (10.1) тождество (10.2), мы получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{10.3}$$

эквивалентное уравнению (10.1). Достаточно доказать, что уравнение (10.3) определяет относительно системы $Oxy$ некоторую прямую.

Мы докажем, что уравнение (10.3) (а стало быть, и (10.1)) определяет прямую $L$, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$ и перпендикулярную вектору $\mathbf{n}=\{A,B\}$ (так как $A$ и $B$ одновременно не равны нулю, то вектор $\mathbf{n}$ ненулевой).

Если точка $M(x,y)$ лежит на указанной прямой $L$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (10.3), т.к. в этом случае векторы $\mathbf{n}=\{A,B\}$ и $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0\}$ ортогональны и их скалярное произведение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{10.4}$$

равно нулю. Если же точка $M(x,y)$ не лежит на указанной прямой $L$, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (10.4). В этом случае векторы $\mathbf{n}$ и $\overline{M_0M}$ не ортогональны, и поэтому их скалярное произведение (10.4) не равно нулю.

Определение 10.1 Уравнение $Ax+By+C=0$ с произвольными коэффициентами $A$, $B$ и $C$ такими, что $A$ и $B$ не равны нулю одновременно, называется общим уравнением прямой.

Мы доказали, что прямая, определяемая общим уравнением (10.1), ортогональна к вектору $\mathbf{n}=\{A,B\}$.

Определение 10.2 Вектор $\mathbf{n}=\{A,B\}$ называется нормальным вектором прямой $Ax+By+C=0$.

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ называется полным, если все его коэффициенты $A,B$ и $C$ отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

### 10.1.2 Неполные уравнения прямой.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1). $C=0$. Уравнение $Ax+By=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат (рис. 10.1). Координаты начала удовлетворяют этому уравнению.

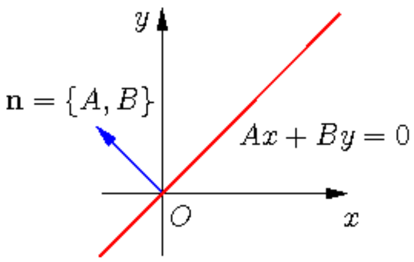


Рис. 10.1: Неполное уравнение прямой: $C=0$.

2). $B=0$. Уравнение $Ax+C=0$ определяет прямую, параллельную оси $Oy$ (рис. 10.2). Нормальный вектор этой прямой $\mathbf{n}=\{A,0\}$ ортогонален оси $Oy$).

3). $A=0$. Уравнение $By+C=0$ определяет прямую, параллельную оси $Ox$ (рис. 10.3). Нормальный вектор этой прямой $\mathbf{n}=\{0,B\}$ ортогонален оси $Ox$).

4). $B=0$ и $C=0$, уравнение $Ax=0$ определяет ось $Oy$ (эта прямая параллельна оси $Oy$ и проходит через начало координат).

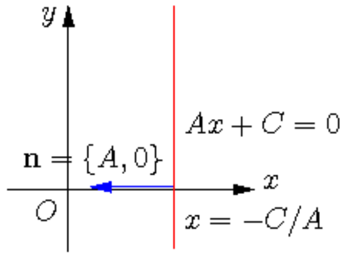


Рис. 10.2: Неполное уравнение прямой: $B = 0$.

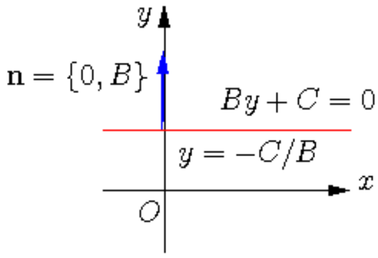


Рис. 10.3: Неполное уравнение прямой: $A = 0$.

5). $A = 0$ и $C = 0$, уравнение $By = 0$ определяет ось $Ox$ (эта прямая параллельна оси $Ox$ и проходит через начало координат) .

### 10.1.3 Уравнение прямой в отрезках.

Рассмотрим полное уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Пусть все коэффициенты отличны от нуля. В этом случае мы можем переписать уравнение $Ax + By + C = 0$ в виде

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1 \tag{10.5}$$

а затем положить $a = -C/A$ и $b = -C/B$. В результате получим, что общее уравнение прямой может быть приведено к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{10.6}$$

**Определение 10.3** Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой в отрезках.

В уравнении "в отрезках"числа $a$ и $b$ имеют простой геометрический смысл (рис. 10.4): они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях $Ox$ и $Oy$ соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).

Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения прямой определяемой уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, с осями координат. Например, точка пересечения с осью $Ox$ определяется из совместного рассмотрения уравнения прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ с уравнением $y = 0$ оси $Ox$. Мы получим координаты точки пересечения $x = a, y = 0$. Аналогично устанавливается, что координаты точки пересечения прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ осью $Oy$ имеют вид $x = 0, y = b$. Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения этой прямой на рисунке.

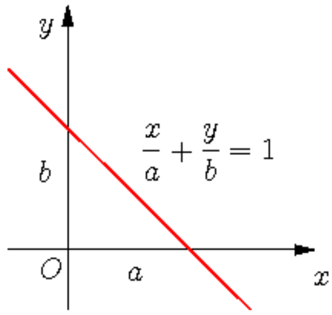


Рис. 10.4: Уравнение прямой в отрезках.

### 10.1.4 Каноническое уравнение прямой.

**Определение 10.4** Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть *направляющим вектором* этой прямой.

Рассмотрим следующую задачу: найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1,y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\mathbf{q}=\{l,m\}$. Очевидно, точка $M(x,y)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1\}$ и $\mathbf{q}=\{l,m\}$ коллинеарны, т е тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m} \tag{10.7}$$

Уравнение (10.7) и есть искомое уравнение прямой.

**Определение 10.5** Уравнение $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$ называют *каноническим уравнением прямой*.

Заметим, что в каноническом уравнении (10.7) один из знаменателей $l$ или $m$ может оказаться равным нулю (оба числа $l$ и $m$ равняться нулю не могут, т.к. вектор $\mathbf{q}=\{l,m\}$ - ненулевой). Так как всякую пропорцию $a/b=c/d$ мы понимаем как равенство $ad=bc$, обращение в нуль одного из знаменателей в (10.7) означает обращение в нуль соответствующего числителя. Если, например, $l=0$, то, поскольку $m\neq 0$, из равенства $l(y-y_1)=m(x-x_1)$ заключаем, что $x-x_1=0$.

В качестве примера запишем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ (будем считать, что эти точки считаются отличными друг от друга).

Так как за направляющий вектор такой прямой можно взять вектор $\mathbf{q}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$ и прямая проходит через точку $M_1(x_1,y_1)$, то из канонического уравнения получим уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{10.8}$$

### 10.1.5 Прямая с угловым коэффициентом.

Рассмотрим любую прямую, не параллельную оси $Ox$. Введем понятие угла наклона этой прямой к оси $Ox$. Предположим, что рассматриваемая прямая пересекает ось $Ox$ в точке $A$, как это показано на рис. 10.5.

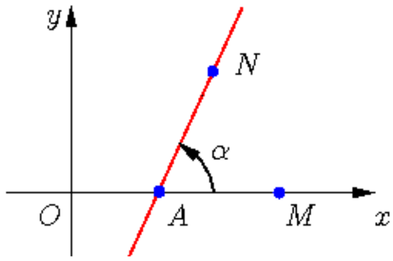


Рис. 10.5: Прямая с угловым коэффициентом.

Возьмем на оси $Ox$ произвольную точку $M$, лежащую по ту сторону от точки $A$, куда направлена ось $Ox$ (рис. 10.5), а на рассматриваемой прямой произвольную точку $N$, лежащую по ту сторону от точки $A$, куда направлена ось $Oy$. Угол $\alpha = \angle NAM$ назовем углом наклона данной прямой к оси $Ox$.

Если прямая параллельна оси $Ox$ или совпадает с ней, то угол наклона этой прямой к оси $Ox$ будем считать равным нулю.

Тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$ называется угловым коэффициентом этой прямой. Если обозначить буквой $k$ угловой коэффициент данной прямой, а буквой $\alpha$ угол наклона этой прямой к оси $Ox$, то по определению можно записать $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Отметим, что для прямой, параллельной оси $Ox$, угловой коэффициент равен нулю, а для прямой, перпендикулярной оси $Ox$, угловой коэффициент не существует (формально говорят, что угловой коэффициент "обращается в бесконечность").

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ с данным угловым коэффициентом $k$.

Для этого докажем сначала следующее утверждение: если прямая не параллельна оси $Oy$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{q} = \{l, m\}$, то угловой коэффициент этой прямой равен $k = m/l$

Пусть $\alpha$ - угол наклона прямой к оси $Ox$, а $\theta$ - угол наклона направляющего вектора $\mathbf{q} = \{l, m\}$ $Ox$. Так как прямая может быть наклонена к оси $Ox$ под острым или под тупым углом и ее направляющий вектор $\mathbf{q}$ может иметь два противоположных направления, то возможны четыре случая, изображенных на рис. 10.6.

В случаях 1) и 3): $\theta = \alpha$ и для проекций на оси вектора $\mathbf{q}$ справедливы формулы

$$l = |\mathbf{q}|\cos\theta,$$
$$m = |\mathbf{q}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\mathbf{q}|\sin\theta.$$

В случаях 2) и 4): $\theta = \pi - \alpha$ и для проекций вектора $\mathbf{q}$ справедливы формулы

$$l = |\mathbf{q}|\cos\theta,$$
$$m = -|\mathbf{q}|\sin\theta.$$

В случаях 1) и 3):
$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha$ и $m/l = \operatorname{tg}\theta$,
а в случаях 2) и 4):
$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\alpha$ и $m/l = -\operatorname{tg}\theta$.
Таким образом, во всех четырех случаях $\operatorname{tg}\alpha = m/l$, и утверждение доказано.

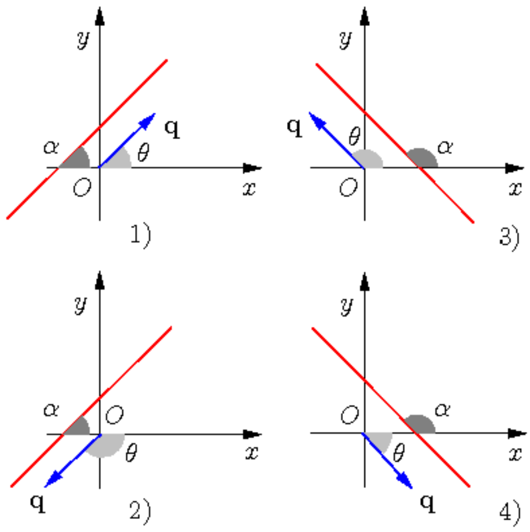


Рис. 10.6: Различные расположения прямой и направляющего вектора.

Для того чтобы вывести уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент $k$, умножим обе части канонического уравнения

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \tag{10.9}$$

на $m$ и учтем, что $m/l = k$.

Получим искомое уравнение в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{10.10}$$

Если теперь обозначить через $b$ постоянную $b = y_1 - kx_1$, то уравнение (10.10) примет вид

$$y = kx + b. \tag{10.11}$$

**Определение 10.6** Уравнение $y = kx + b$ называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

В этом уравнении $k$ обозначает угловой коэффициент данной прямой, а $b$ представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси $Oy$, начиная от начала координат.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть совместно уравнение (10.11) и уравнение $x = 0$ оси $Oy$ и найти координаты точки пересечения оси $Oy$ и прямой (10.11): $x = 0, y = b$.

### 10.1.6 Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Рассмотрим прямые, изображенные на рис. 10.7

1. Пусть сначала две прямые $L_1$ и $L_2$ заданы общими уравнениями

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

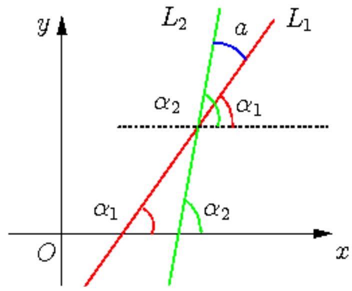


Рис. 10.7: Угол между прямыми.

Так как нормальным вектором прямой $L_1$ является вектор $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, а нормальным вектором прямой $L_2$ является вектор $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, то задача об определении угла между прямыми $L_1$ и $L_2$ сводится к определению угла $\alpha$ между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$.

Из определения скалярного произведения $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\alpha$ и из выражения в координатах длин векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ и их скалярного произведения получим

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \tag{10.12}$$

Итак, угол $\alpha$ между прямыми $L_1$ и $L_2$ определяется с помощью формулы (11.8).

Условие параллельности прямых $L_1$ и $L_2$, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т. е. имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{10.13}$$

Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$ может быть получено с помощью формулы (11.8) (при $\cos\alpha = 0$) и имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{10.14}$$

2. Пусть теперь две прямые $L_1$ и $L_2$ заданы каноническими уравнениями

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1},$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых $L_1$ и $L_2$ служат векторы $\mathbf{q}_1 = \{l_1, m_1\}$ и $\mathbf{q}_2 = \{l_2, m_2\}$, то в полной аналогии с предыдущим случаем, получим, что угол $\alpha$ между прямыми $L_1$ и $L_2$ теперь определяется с помощью формулы

$$\cos\alpha = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}} \tag{10.15}$$

Условие параллельности прямых $L_1$ и $L_2$, эквивалентное условию коллинеарности векторов $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т. е. имеет вид

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{10.16}$$

Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$ может быть получено с помощью формулы (10.15) (при $\cos\alpha = 0$) и имеет вид

$$l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \tag{10.17}$$

3. Пусть прямые $L_1$ и $L_2$ уравнениями с угловым коэффициентом

$$L_1: \qquad y = k_1 x + b_1,$$

$$L_2: \qquad y = k_2 x + b_2.$$

Если $\alpha_1$ и $\alpha_2$ - углы наклона прямых $L_1$ и $L_2$ к оси $Ox$, а $\alpha$ один из углов между этими прямыми, то $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ и

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

В результате получаем следующую формулу для определения угла $\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{10.18}$$

Условие параллельности прямых $L_1$ и $L_2$ . имеет вид

$$k_1 = k_2. \tag{10.19}$$

Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$ может быть получено с помощью формулы (10.18) (при условии, что тангенс угла $\alpha$ не существует, т.е. обращается в нуль знаменатель (10.18))

$$1 + k_1 k_2 = 0. \tag{10.20}$$